

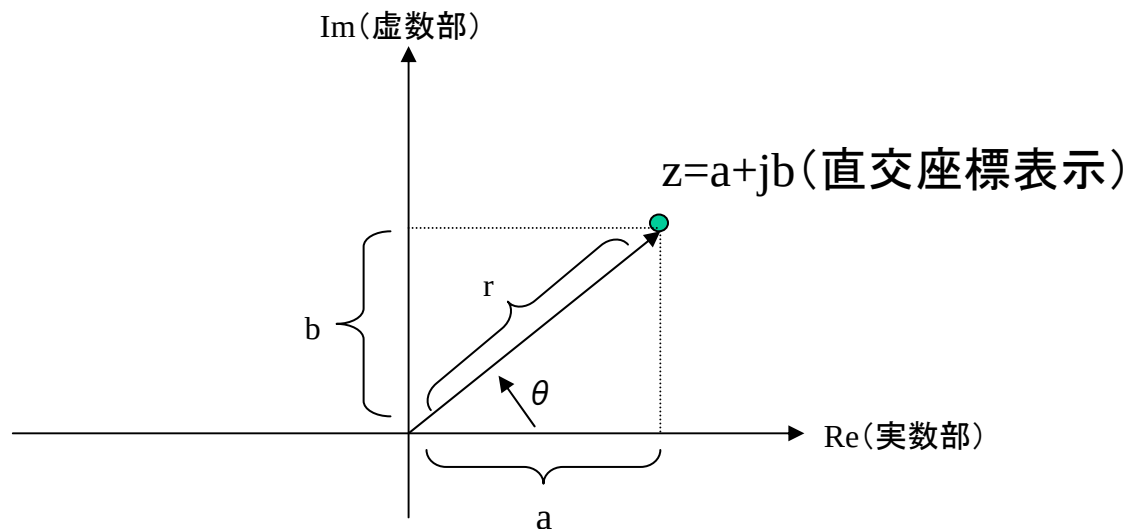
高度ポリテク・セミナー
フーリエ変換による信号解析手法と
信号処理への応用

2008年7月23日

東京電機大学・三谷 政昭

信号変換の基礎

極座標表示と信号パラメータ



$$\left(\begin{array}{l} \text{オイラーの公式} \\ e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \end{array} \right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan(a, b) ; -\pi \leq \theta \leq \pi$$

↓

$$z = re^{j\theta} ; j = \sqrt{-1}$$

(極座標表示)

r : 振幅 [絶対値, $|z|$]

θ : 位相 [偏角, $\angle z$ あるいは $\arg(z)$]

振幅: 入力と出力の大きさの比(何倍するか)

位相: 入力と出力の時間ずれ(角度に換算 [rad])

[例題1－1]各複素数の極座標表示(絶対値, 位相)を求めよ.

① $3 - j3$

② $-2 - j2$

③ $-\sqrt{3} + j\sqrt{3}$

④ $1 + j$

[解答1－1]

“茶房 スペクトル”とフリーエさん

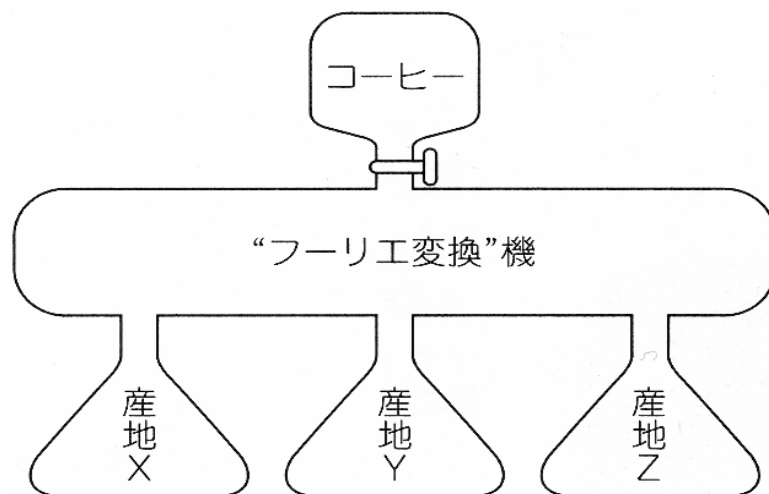


コーヒー・ポット			
	P	Q	R
A男	すっきり	すっぱい	フルーティ
B之助	しぶい	なめらか	まろやか
C子	にがい	さわやか	どっしり

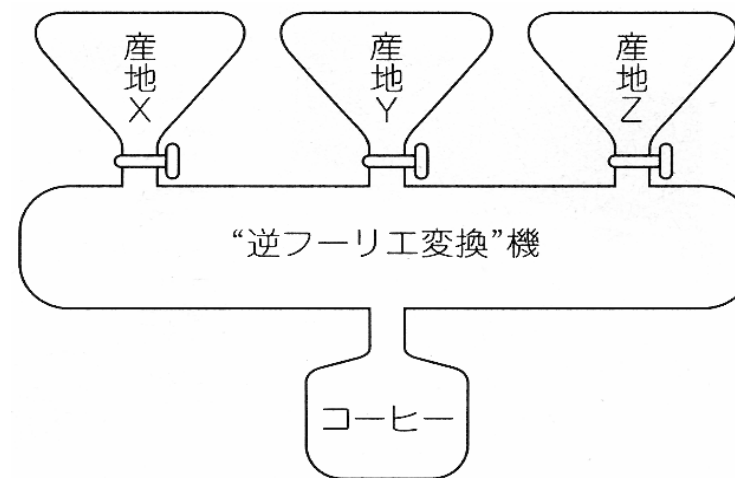
フーリエ変換と逆フーリエ変換

3種類のコーヒーの産地別含有率

コーヒー ポット	産地X	産地Y	産地Z
P	10%	70%	20%
Q	50%	20%	30%
R	40%	10%	50%

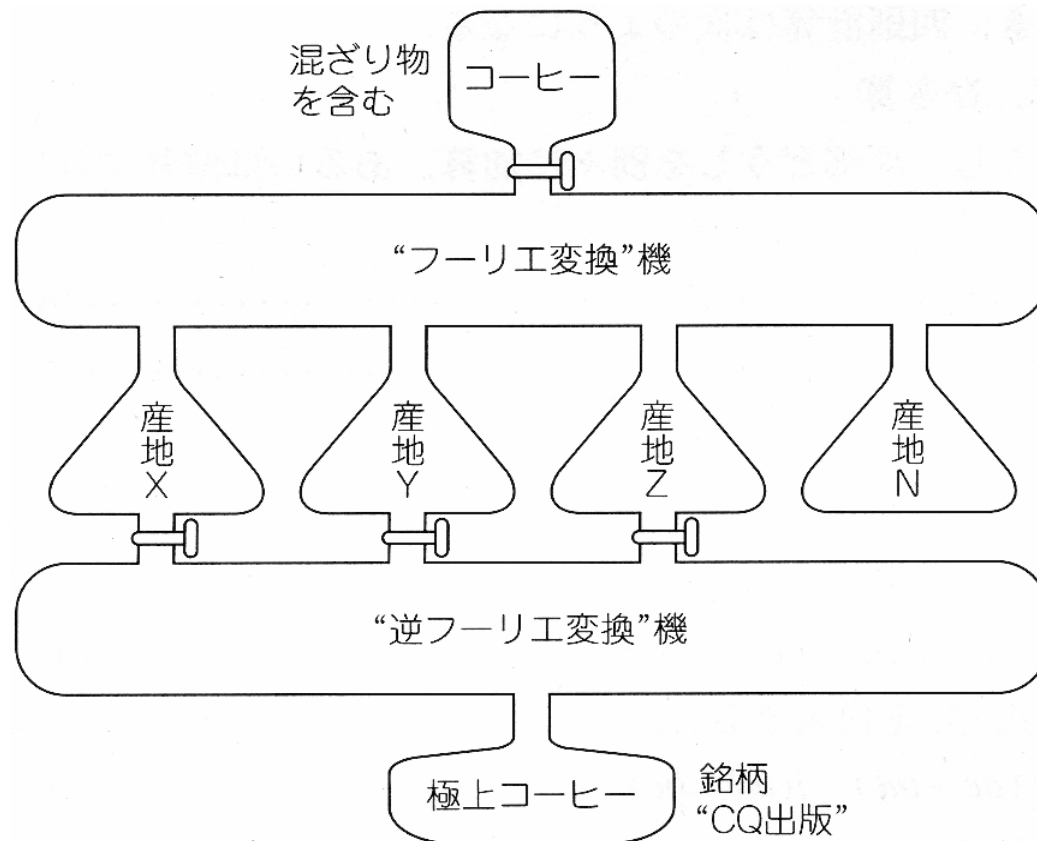


(a) 産地別の含有量を分析



(b) 産地別含有量を変えてコーヒー製造

混ざり物を除去するコーヒー製造手順 (フィルタリング)



雑音と信号を切り分ける

= “フーリエ変換”



雑音を取り除く

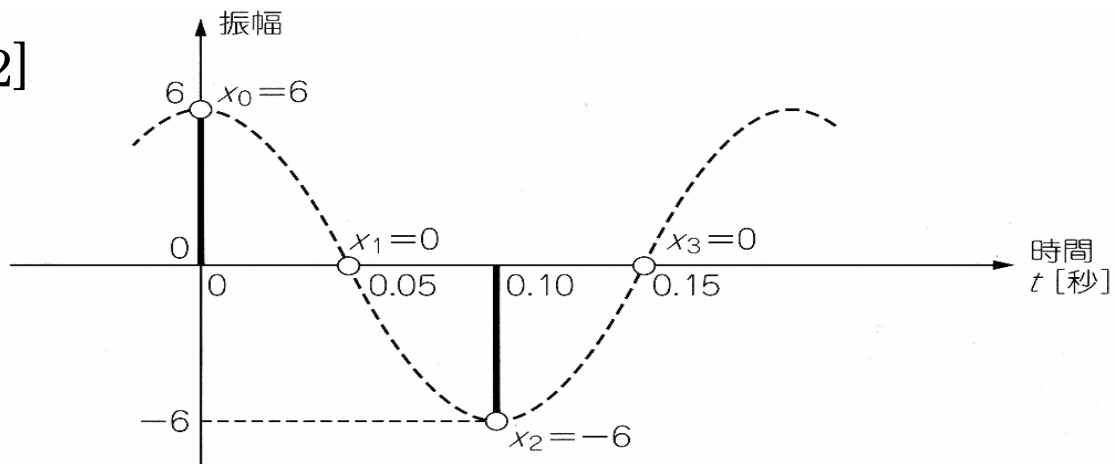
= 不純物除去
(フィルタリング)



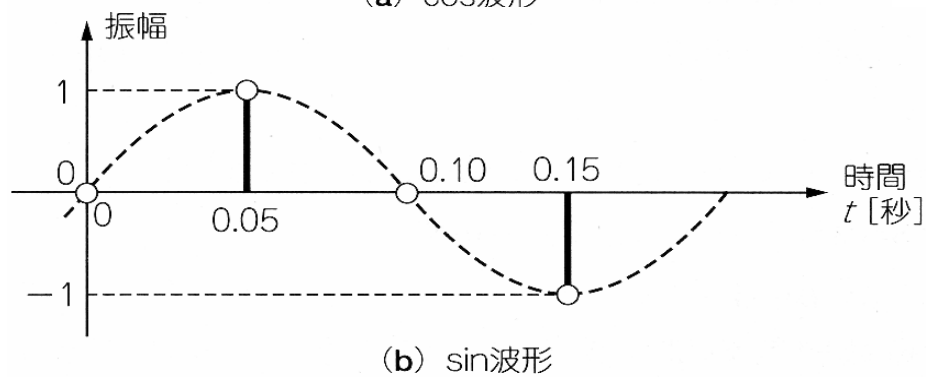
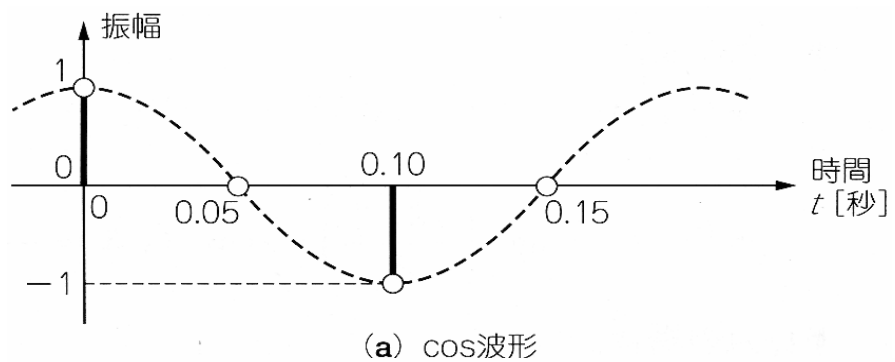
雑音のない信号を合成する

= “逆フーリエ変換”

[例題1-2]



デジタル信号



マッチ度計算用
(基本パターン)

マッチ度計算

$$R_{\cos} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x_k \cos\left(\frac{2\pi}{0.2} t_k\right) \quad R_{\sin} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x_k \sin\left(\frac{2\pi}{0.2} t_k\right)$$

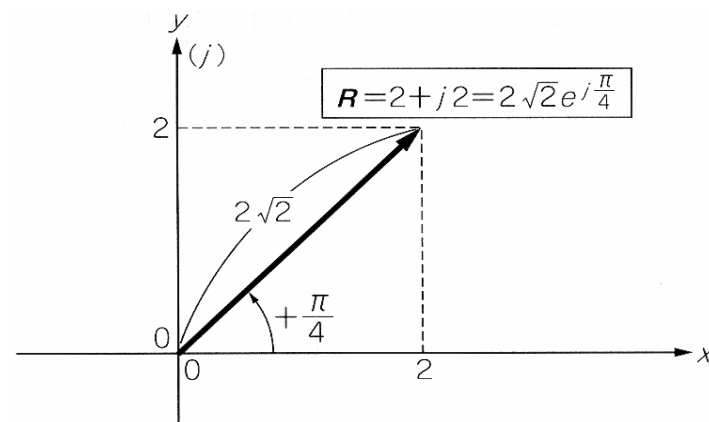
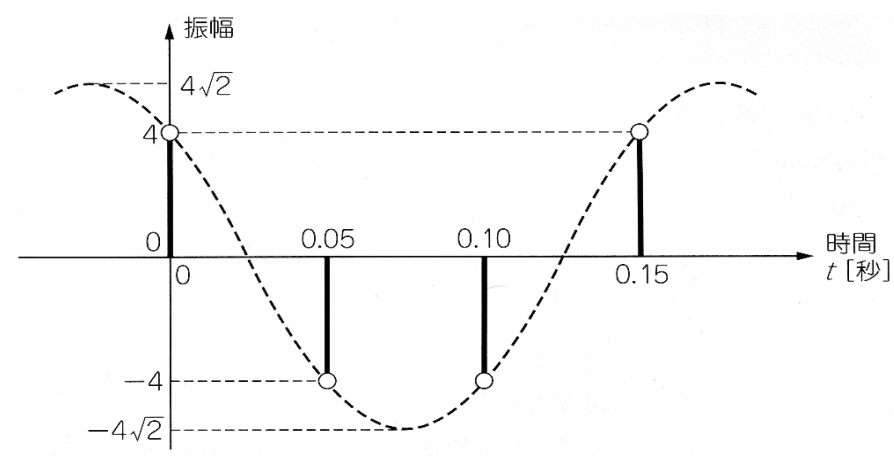
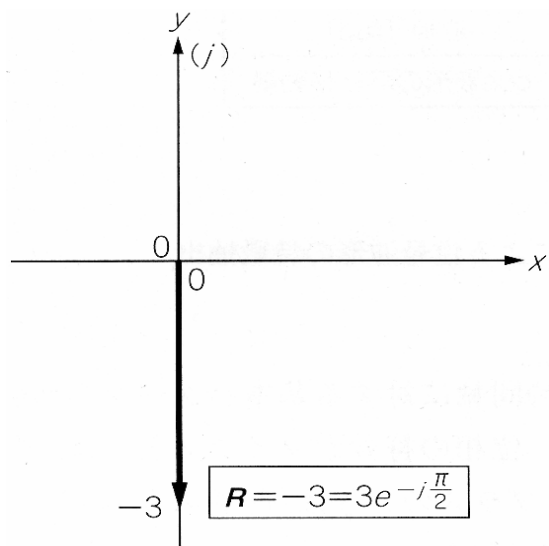
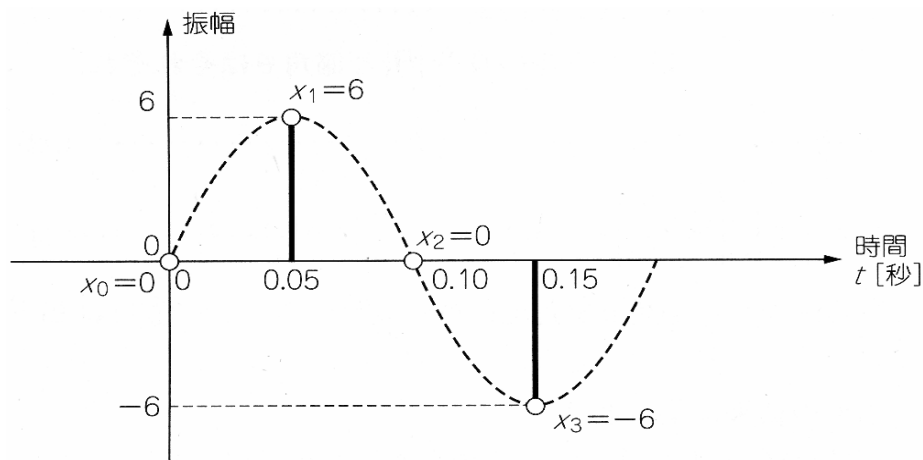
マッチ度ベクトル R による信号波形の特徴抽出

$$R = R_{\cos} - jR_{\sin} = |R| e^{j\theta}$$

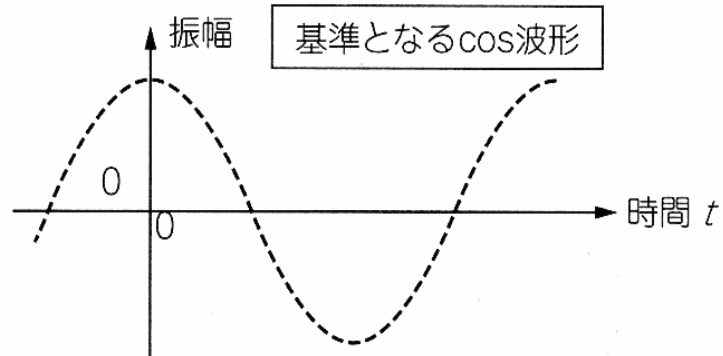
位相 [rad]
cos波形の平行移動量

最大振幅
$ R $ の2倍

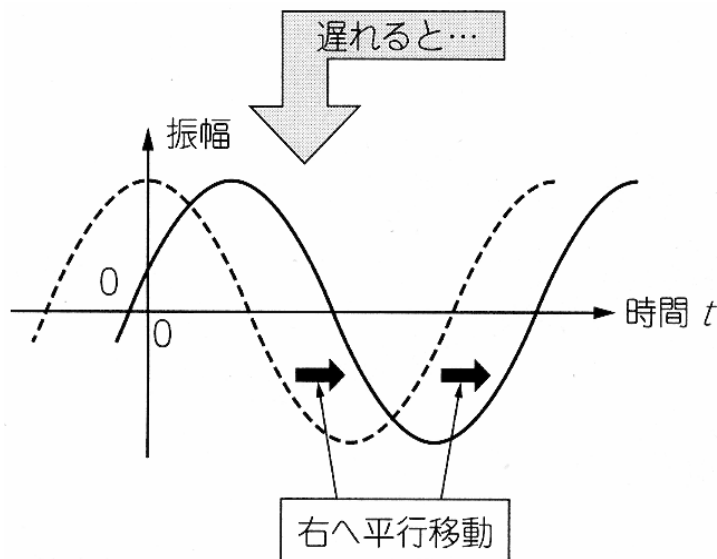
[解答1-2]



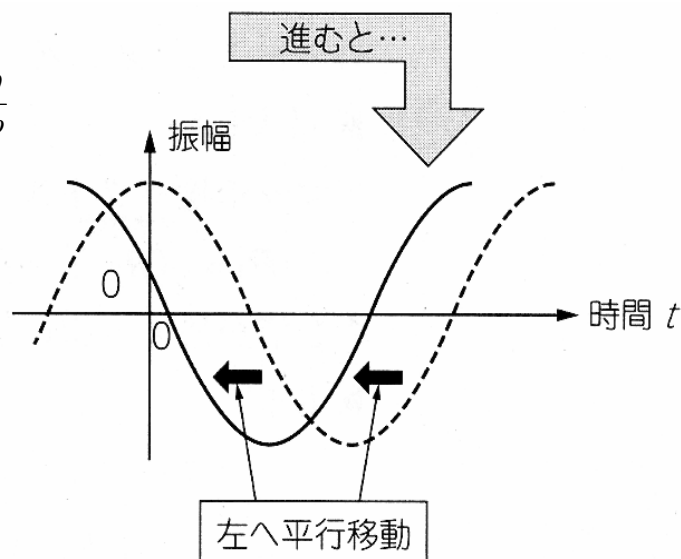
信号波形の“時間遅れ”と“時間進み”



$$\text{ずれ時間 [秒]} = \frac{\text{位相 [rad]}}{\text{角周波数 [rad/秒]}}$$

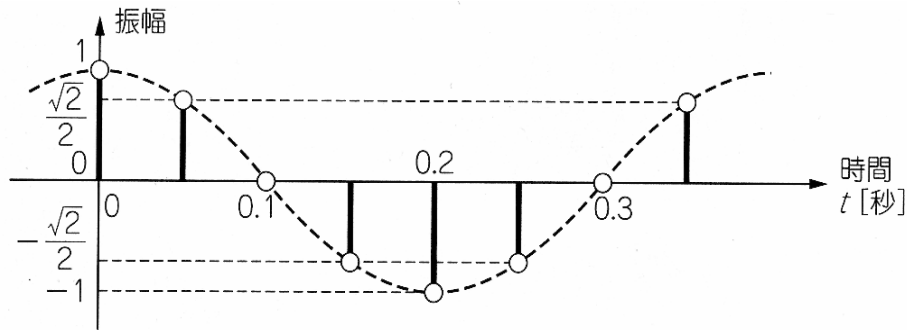
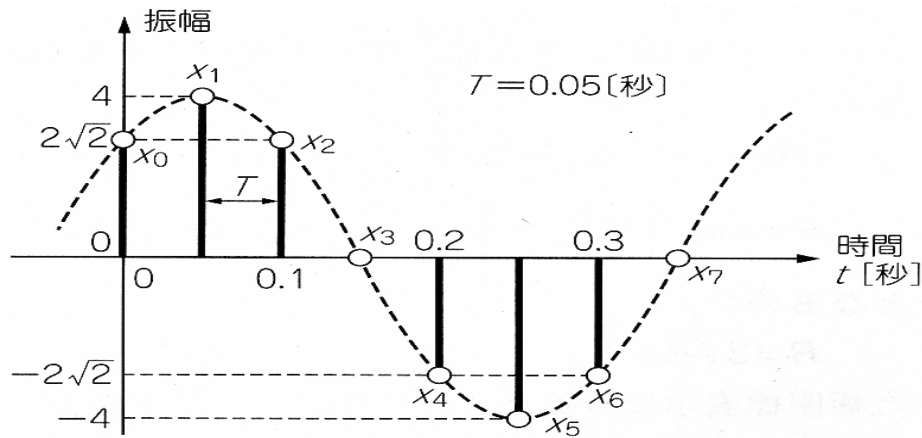


位相 $\theta < 0$ (負)

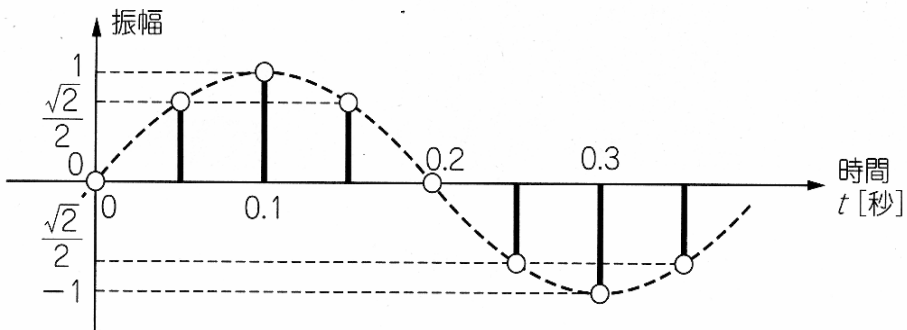


位相 $\theta > 0$ (正)

[例題1-3]



(a) cos波形



(b) sin波形

デジタル信号
(8サンプル)

マッチ度計算用
(基本パターン)

マッチ度はDFTなのだ！？

$$C_{\ell}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\ell\right)$$

$$S_{\ell}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\ell\right)$$

$$\begin{aligned} C_{\ell}^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos(\theta_k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \frac{e^{j\theta_k} + e^{-j\theta_k}}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (e^{j\theta_k} + e^{-j\theta_k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\ell}^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin(\theta_k) \quad \left(\theta_k = \frac{2\pi}{N} k\ell \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \frac{e^{j\theta_k} - e^{-j\theta_k}}{2j} \\ &= \frac{1}{j2N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (e^{j\theta_k} - e^{-j\theta_k}) \end{aligned}$$

マッチ度

$$R_{\ell}^{(N)} = C_{\ell}^{(N)} - jS_{\ell}^{(N)} = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (e^{j\theta_k} + e^{-j\theta_k}) - \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (e^{j\theta_k} - e^{-j\theta_k})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\theta_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N} k\ell}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{k\ell} \quad \boxed{\text{DFT}} \quad \left(e^{-j\frac{2\pi}{N} k\ell} = W_N^{k\ell} \right)$$

フーリエ変換、DFT

$$\text{DFTの定義 (N=4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0 = \frac{1}{4} (f_0 W^0 + f_1 W^0 + f_2 W^0 + f_3 W^0) \\ F_1 = \frac{1}{4} (f_0 W^0 + f_1 W^1 + f_2 W^2 + f_3 W^3) \\ F_2 = \frac{1}{4} (f_0 W^0 + f_1 W^2 + f_2 W^4 + f_3 W^6) \\ F_3 = \frac{1}{4} (f_0 W^0 + f_1 W^3 + f_2 W^6 + f_3 W^9) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{IDFTの定義 (N=4)} \\ \text{(逆DFT)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = (F_0 W^0 + F_1 W^0 + F_2 W^0 + F_3 W^0) \\ f_1 = (F_0 W^0 + F_1 W^{-1} + F_2 W^{-2} + F_3 W^{-3}) \\ f_2 = (F_0 W^0 + F_1 W^{-2} + F_2 W^{-4} + F_3 W^{-6}) \\ f_3 = (F_0 W^0 + F_1 W^{-3} + F_2 W^{-6} + F_3 W^{-9}) \end{array} \right.$$

$$W = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$$

$$= \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2) = -j$$

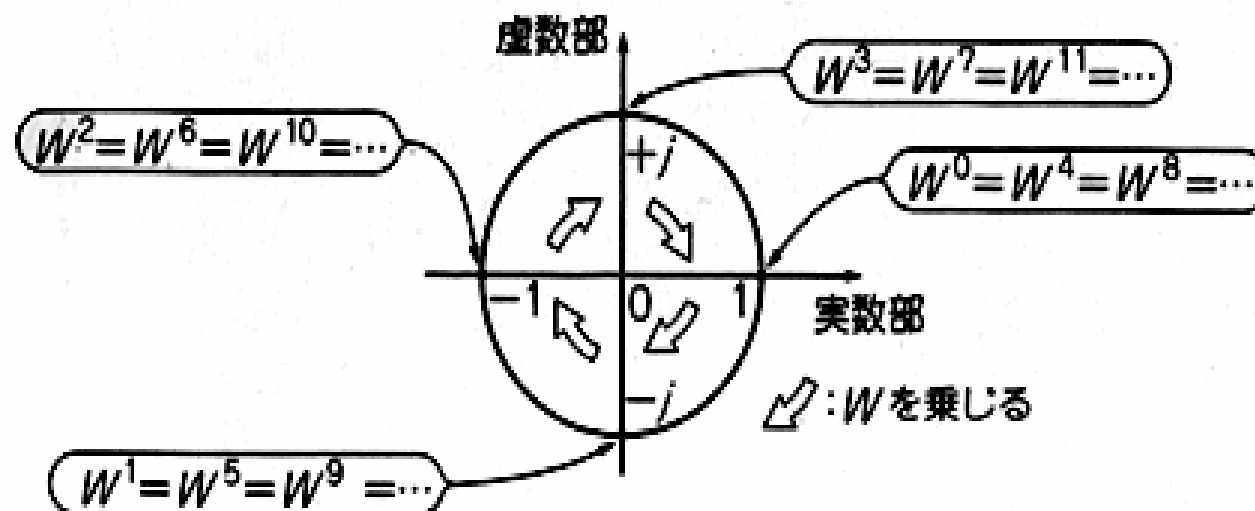
回転因子, ひ
ねり因子

回転因子Wの性質

$$\begin{cases} W^0 = W^4 = W^8 = \dots = 1 \\ W^1 = W^5 = W^9 = \dots = -j \\ W^2 = W^6 = W^{10} = \dots = -1 \\ W^3 = W^7 = W^{11} = \dots = j \end{cases}$$

N=4の周期性を有する

回転因子 (N = 4の場合)



人間ディジタルフーリエ変換(DFT)

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = \frac{1}{4} (f_0 + f_1 + f_2 + f_3) \\ F_1 = \frac{1}{4} (f_0 - jf_1 - f_2 + jf_3) \\ F_2 = \frac{1}{4} (f_0 - f_1 + f_2 - f_3) \\ F_3 = \frac{1}{4} (f_0 + jf_1 - f_2 - jf_3) \end{array} \right.$$

[例 1] $\{2, 2, 2, 2\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

[例 2] $\{-3, -3, -3, -3\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

[例 3] $\{2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2}, 0\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

[例 4] $\{0, -2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

[例 5] $\{2, 2, -2, -2\} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

DFTの性質

- (1) F_0 は直流成分の振幅値を表す。
- (2) F_k と F_{N-k} とは複素共役の関係にある。
- (3) $|F_k|$ は、 $\cos$ 波形の最大振幅値の半分を表す。
- (4) $\arg(F_k)$ は、 $\cos$ 波形を基準として波形の進みや遅れの位相を表す。
- (5) F_k のうち、意味を持つデータは $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$ である。
- (6) F_k の添字の k は山と谷の数を表し、周波数の概念に相当する

人間 デジタルフーリエ逆変換 (IDFT)

$$\begin{cases} f_0 = (F_0 + F_1 + F_2 + F_3) \\ f_1 = (F_0 + jF_1 - F_2 - jF_3) \\ f_2 = (F_0 - F_1 + F_2 - F_3) \\ f_3 = (F_0 - jF_1 - F_2 + jF_3) \end{cases}$$

$$[\text{例 } 1] \quad \{3, 0, 0, 0\} = \{F_0, F_1, F_2, F_3\}$$

$$[\text{例 } 2] \quad \{0, 3, 0, 3\} = \{F_0, F_1, F_2, F_3\}$$

$$[\text{例 } 3] \quad \{0, j3, 0, -j3\} = \{F_0, F_1, F_2, F_3\}$$

$$[\text{例 } 4] \quad \{2, 1 + j\sqrt{3}, 0, 1 - j\sqrt{3}\} = \{F_0, F_1, F_2, F_3\}$$

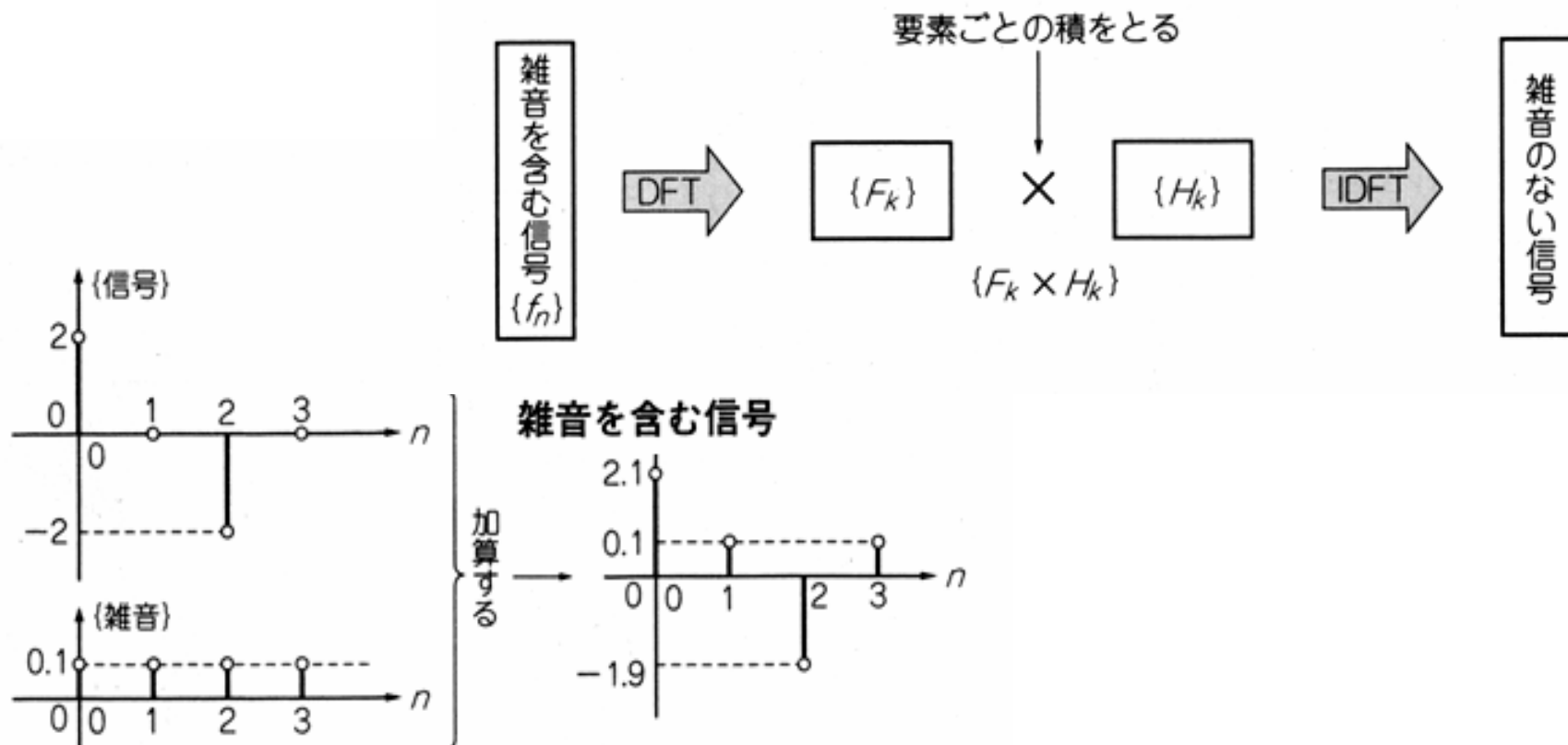
雑音を除去する(フィルタリング)

[手順 1] DFT による周波数成分の計算

[手順 2] 雑音除去の計算

[手順 3] IDFT による時間波形の再合成

雑音の除去(フィルタリング)



DFTと変換の関係

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n (W_N)^{nk} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{-n}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jn\omega T}$$

$$\begin{aligned} G_k &= G(e^{j\omega_k T}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jnk(2\pi/N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n (e^{-j2\pi/N})^{nk} \end{aligned}$$

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk}$$

$$F_k = \frac{1}{N} \times G_k$$

$$G_k = N \times F_k$$

$$\omega_k = k\Delta\omega \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{ただし、} \Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT}$$

(周波数分解能)

いろいろな積分変換の相互関係(まとめ)

信号処理に利用される積分変換

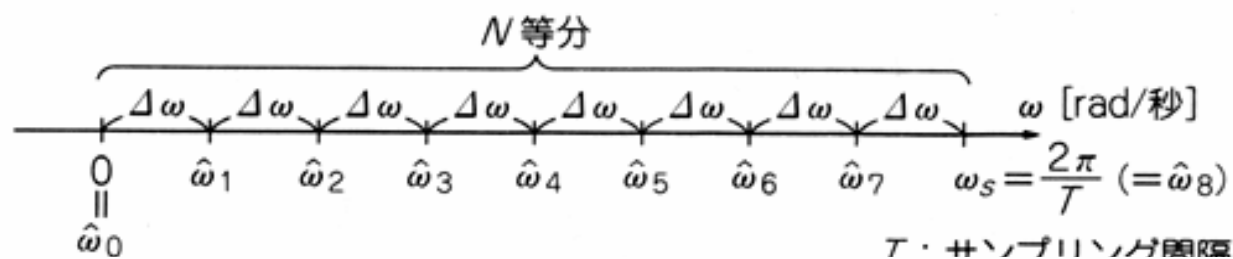
	変換名	対象とする信号 (波形) の性質	変 換 式	特 徴
アナログ解析	フーリエ級数	・ 周期波形 ・ エネルギー無限大	$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt$	・ スペクトル解析 ・ 離散スペクトル
	フーリエ変換	・ 孤立波形 ・ エネルギー有限	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	・ スペクトル解析 ・ 連続スペクトル
	ラプラス変換	・ 時間域半無限大 ($t < 0$ で $f(t) = 0$) ・ エネルギー無限大	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	・ 過渡応答解析 ・ 微分/積分方程式の解法 ・ アナログシステムの伝達特性の解析
ディジタル解析	z 変換	・ 数値系列	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$	・ 差分方程式の解法 ・ ディジタルシステムの伝達特性の解析
	DFT	・ 数値系列 ・ 有限個のサンプル値	$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(e^{-j \frac{2\pi}{N}} \right)^{nk}$	・ スペクトル解析 ・ 離散スペクトル

(T_0 : 周期波形の周期, N : サンプル数)

DFT

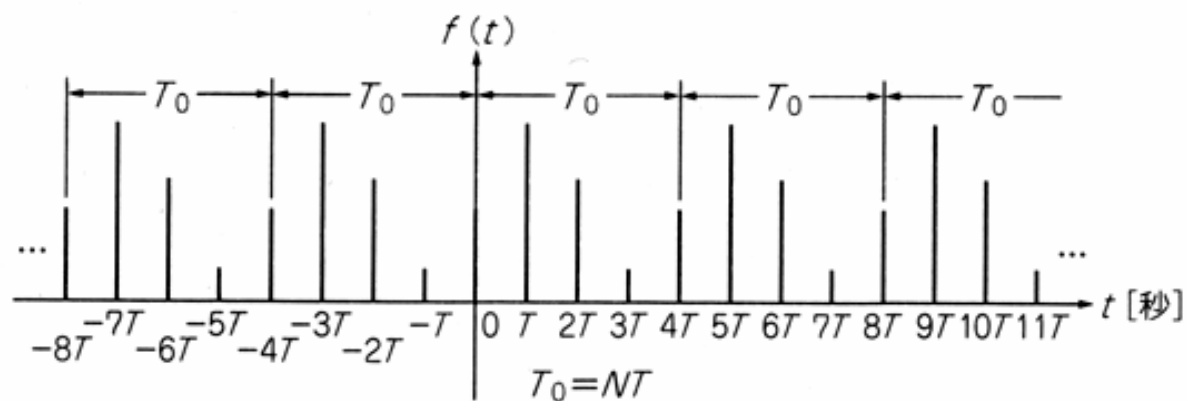
DFTの周波数分解能 ($N=8$ の場合)

$$\text{周波数分解能 } \Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT}$$

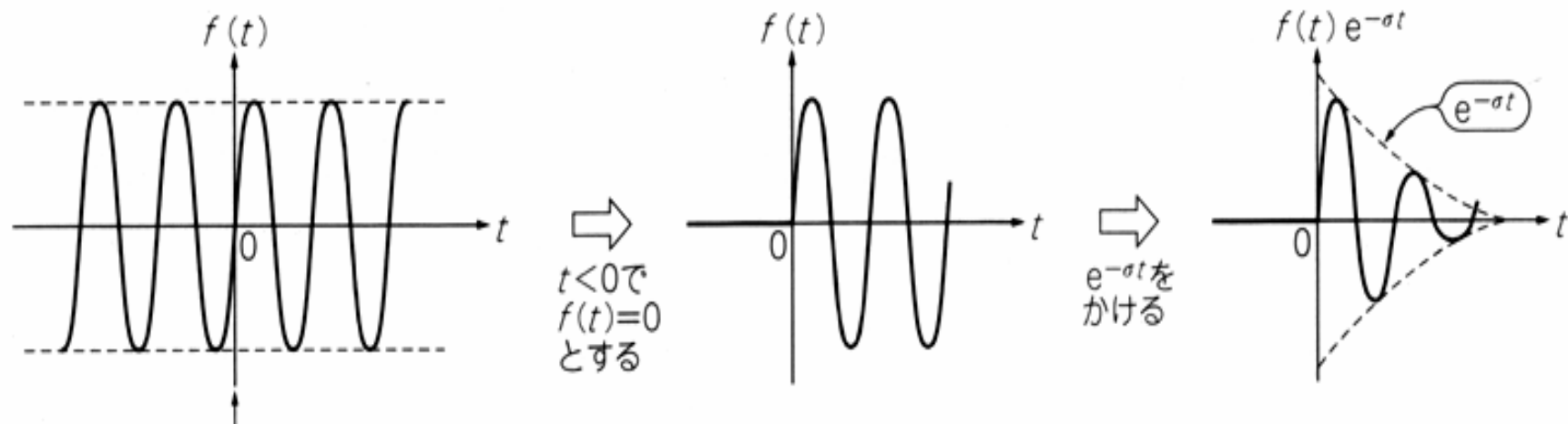


サンプリング間隔 T と信号周期 T_0 の関係

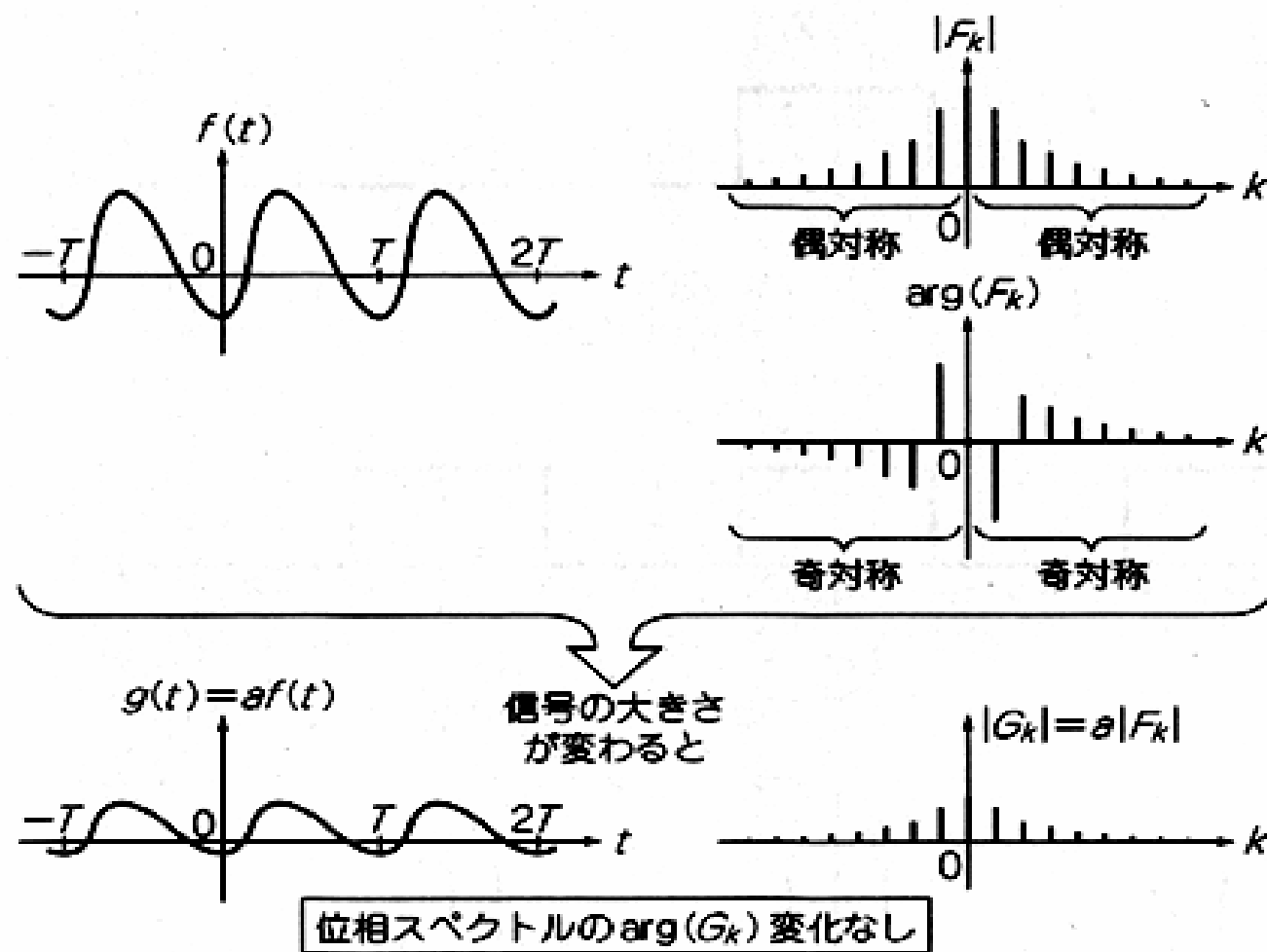
($N=4$ の場合)



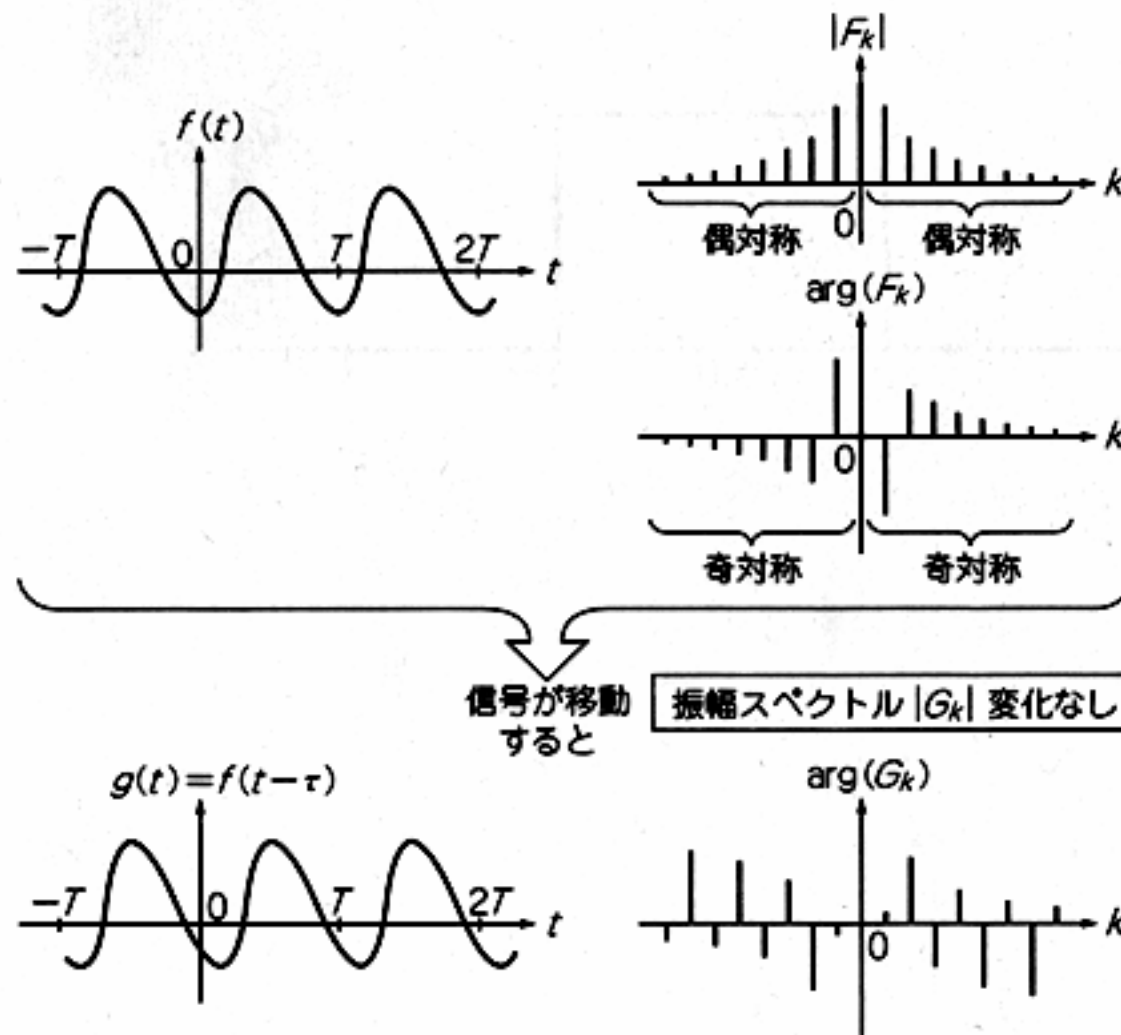
フーリエ変換からラプラス変換へ



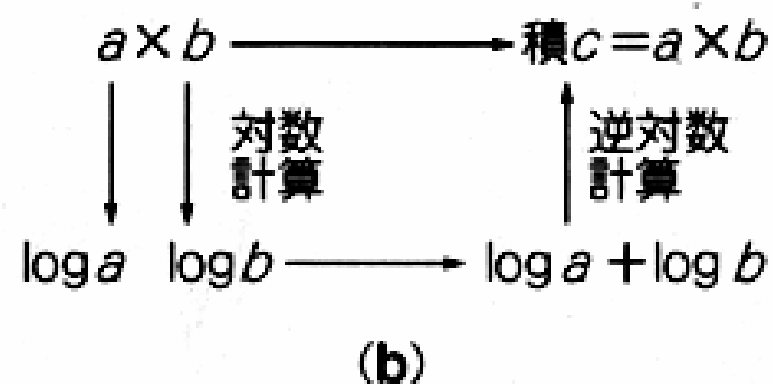
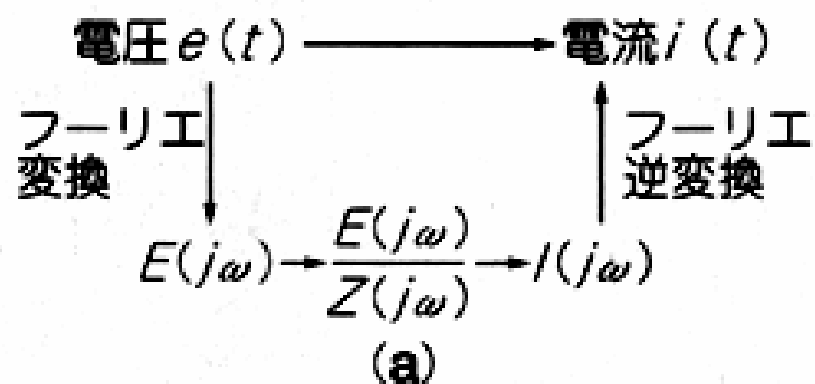
信号の大きさとスペクトル関係



信号の移動とスペクトルの関係



フーリエ変換による回路解析の考え方



今日は、お疲れさまでした。
ご静聴、有り難うございました。

東京電機大学／工学部／情報通信工学科
三谷 政昭