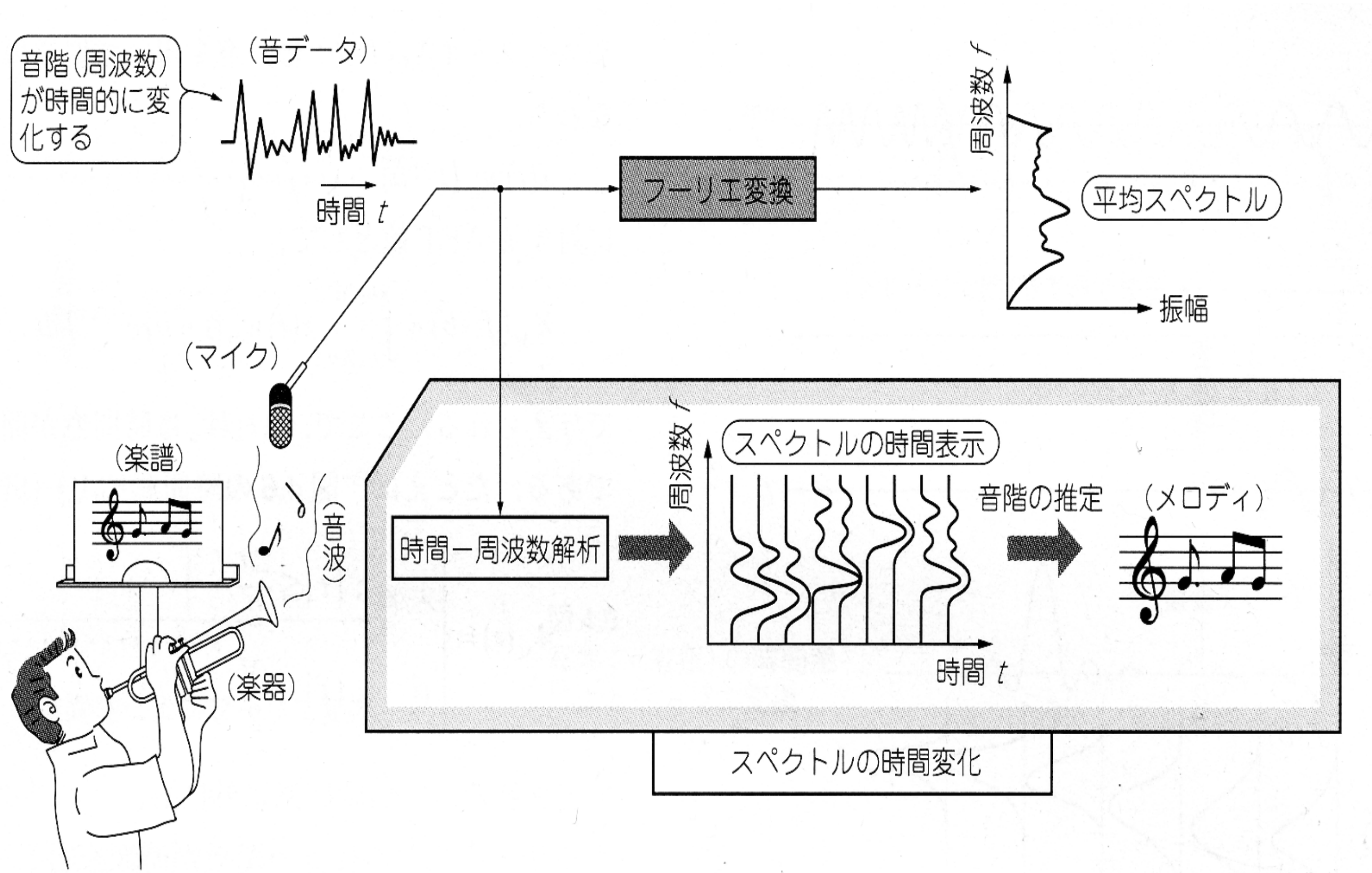
高度ポリテク・セミナー

# ウェーブレット変換による信号解析手法と信号処理への応用

2008年8月4日

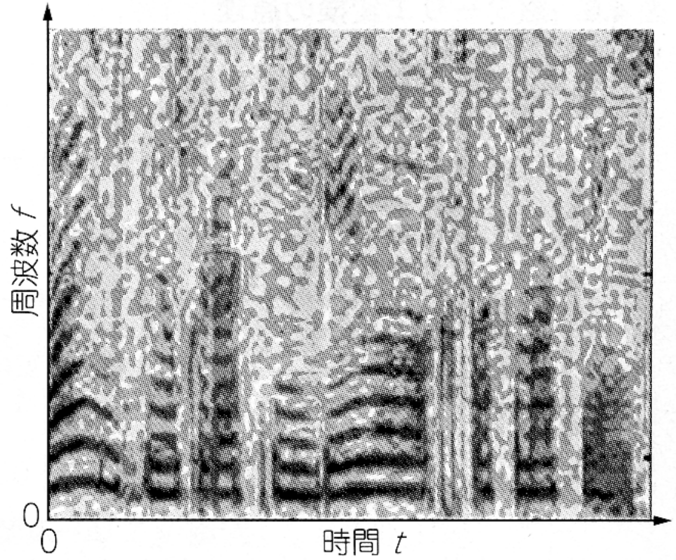
東京電機大学・三谷 政昭

# ウェーブレット変換とは

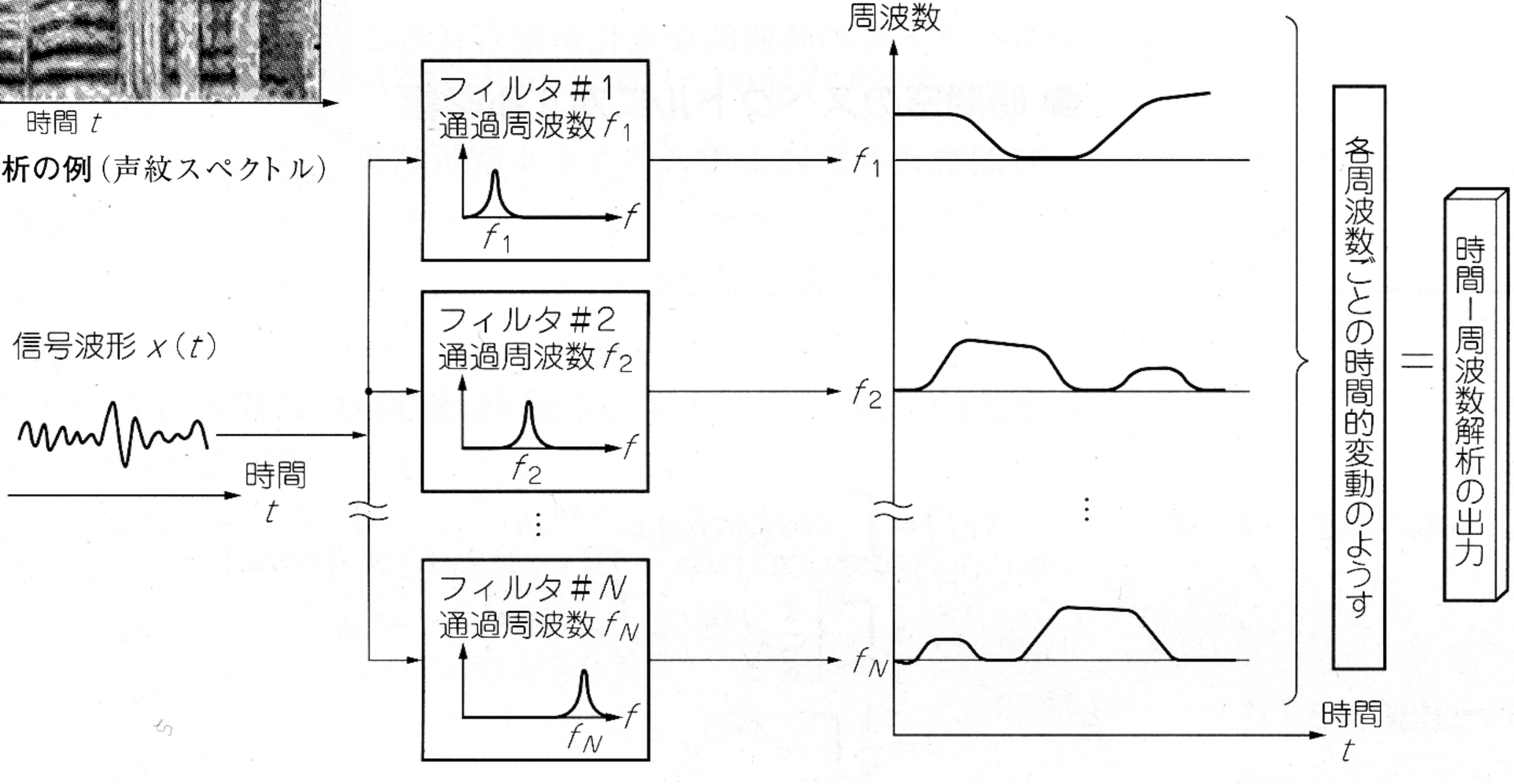



時間ー周波数解析とは

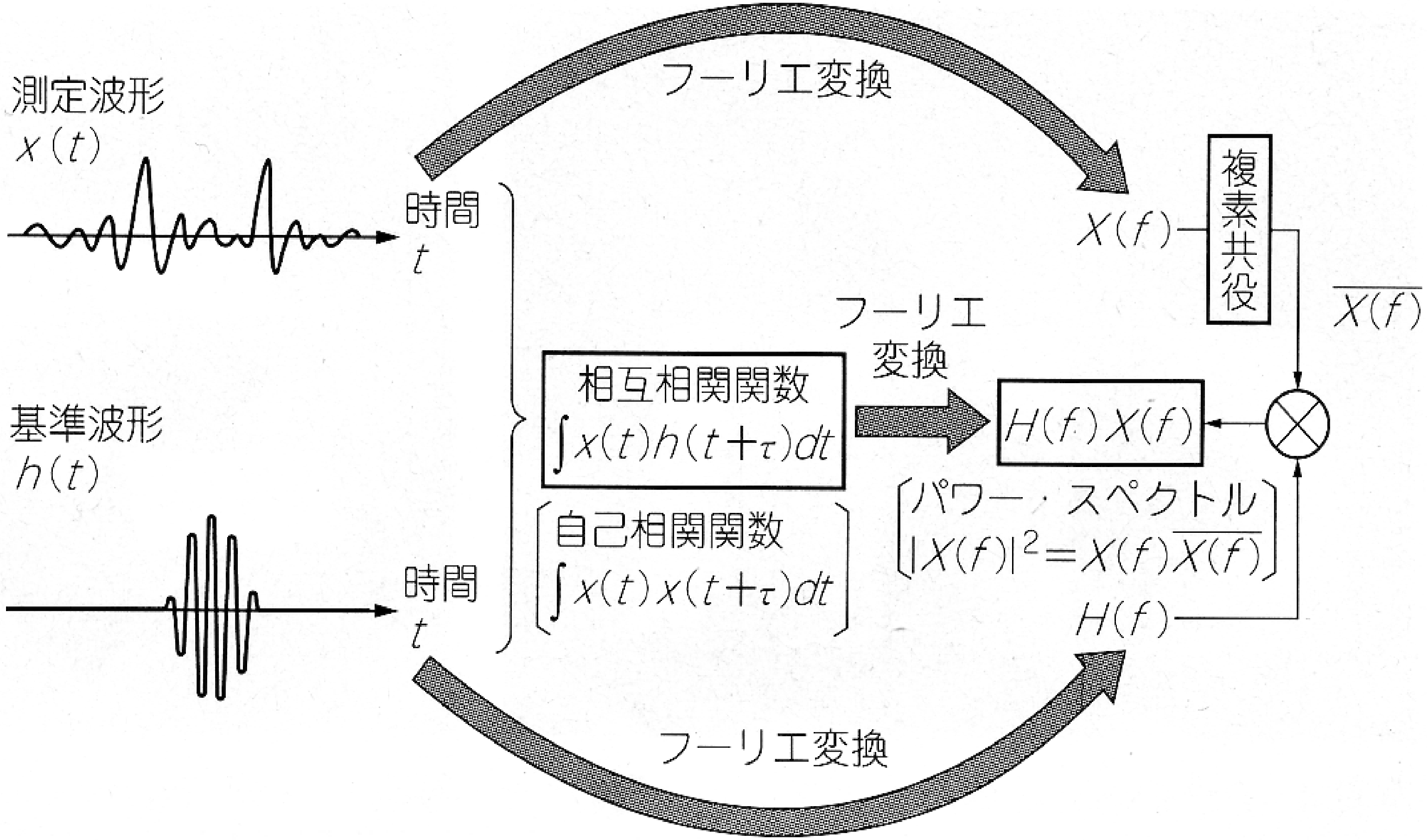
# フィルタ・バンクによる時間ー周波数解析



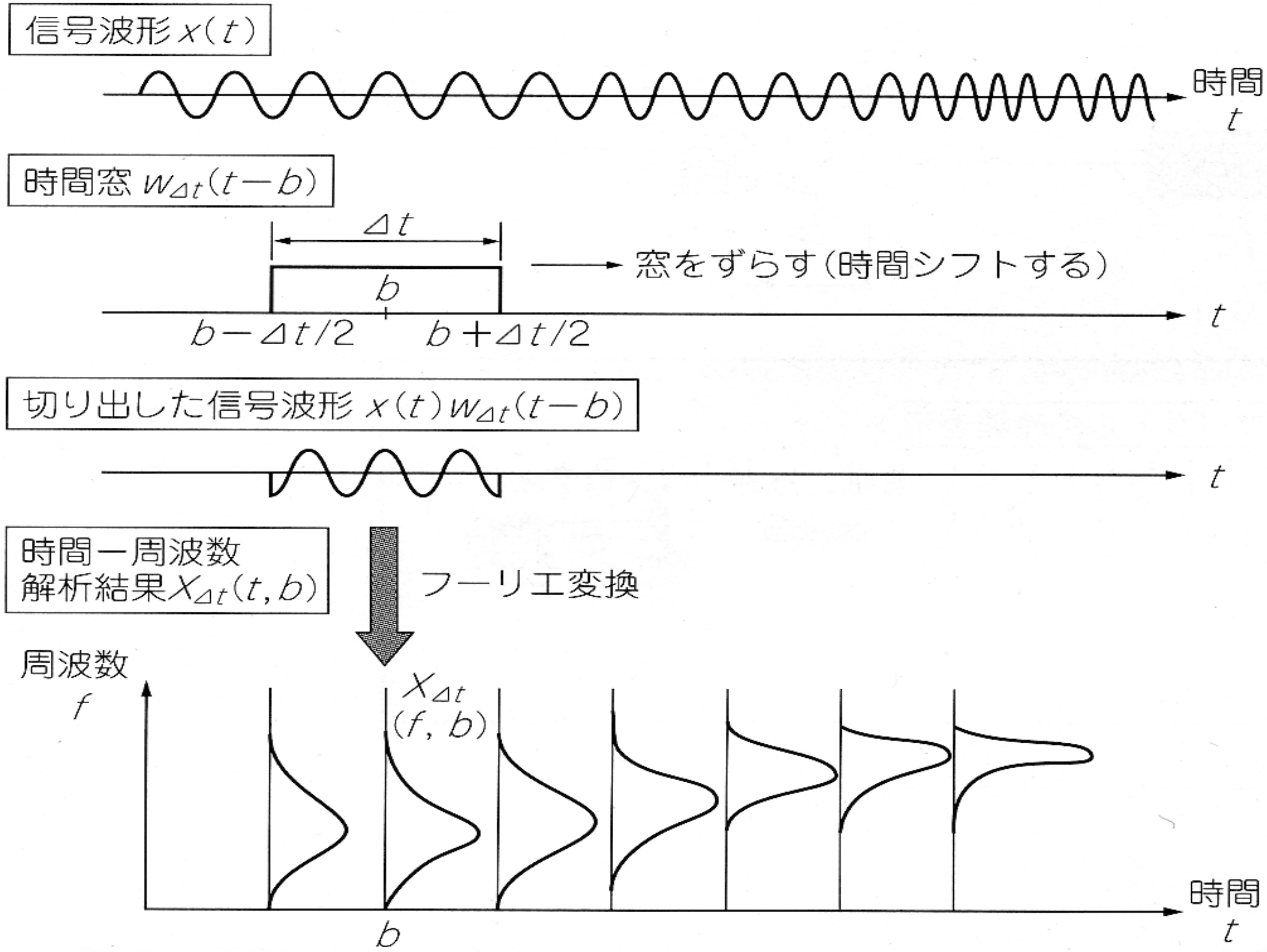

**時間ー周波数解析の例**（声紋スペクトル）



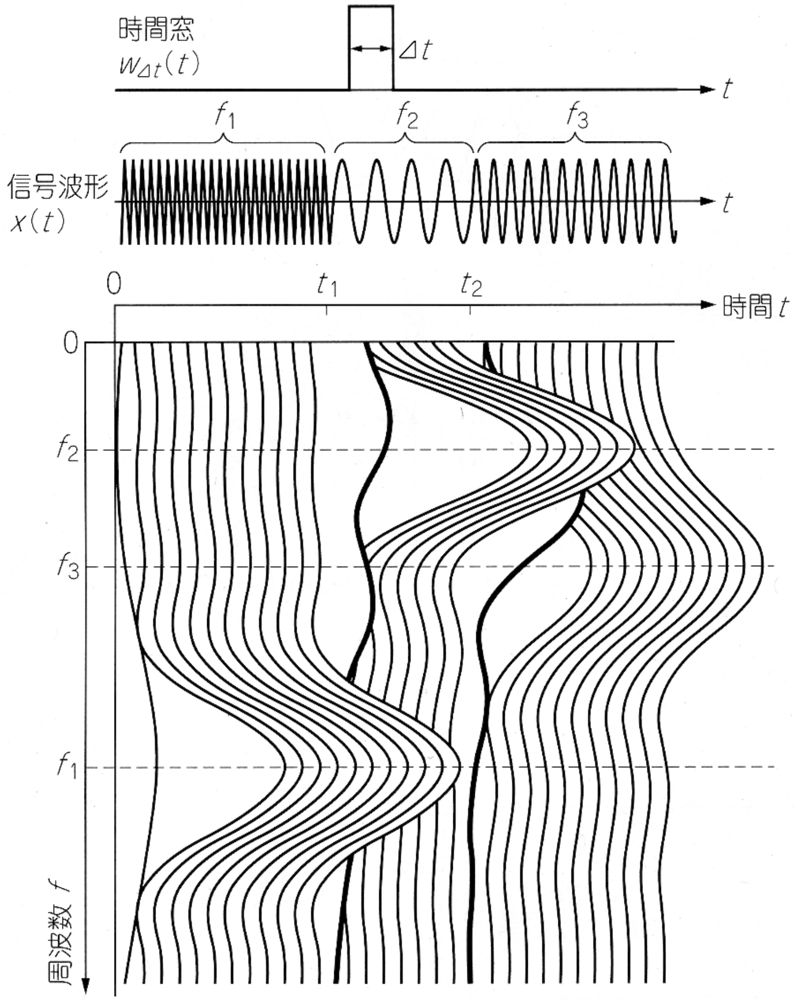
# 相関関数とフーリエ変換



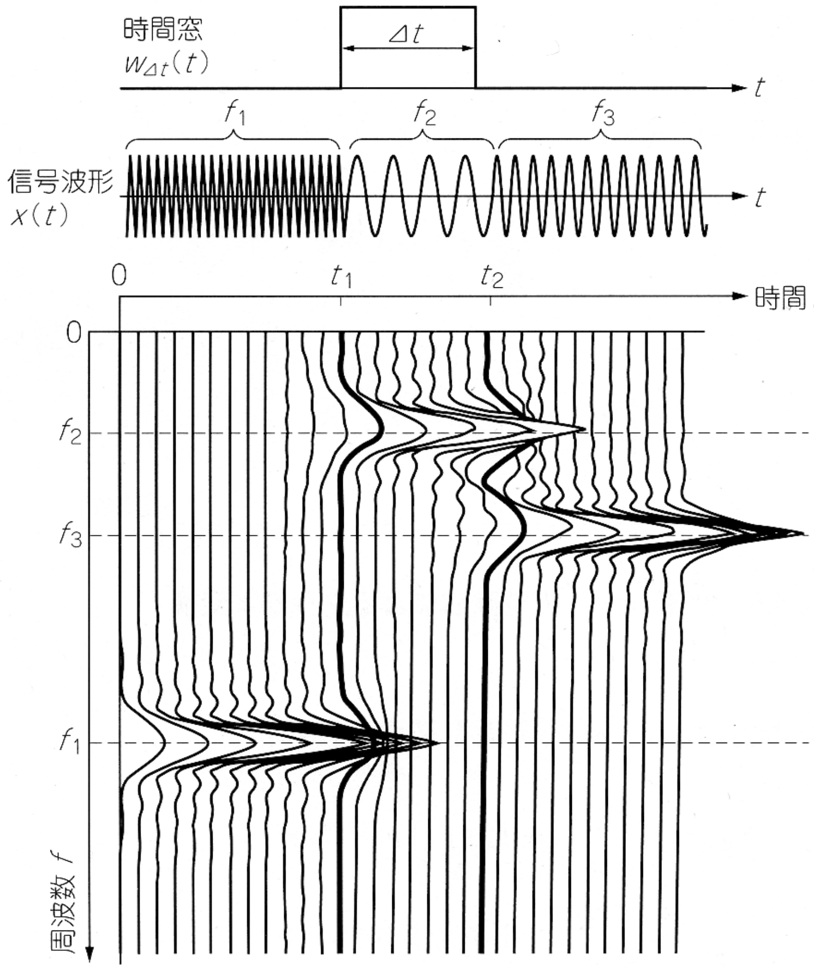
# 窓フーリエ変換の原理


信号波形 $x(t)$
時間
$t$
時間窓 $w_{\Delta t}(t-b)$
$\Delta t$
窓をずらす（時間シフトする）
$b$
$t$
$b-\Delta t/2$
$b+\Delta t/2$
切り出した信号波形 $x(t)w_{\Delta t}(t-b)$
$t$
時間－周波数
解析結果 $X_{\Delta t}(t,b)$
フーリエ変換
周波数
$f$
$X_{\Delta t}$
$(f, b)$
時間
$t$
$b$

# 窓幅とフーリエ変換

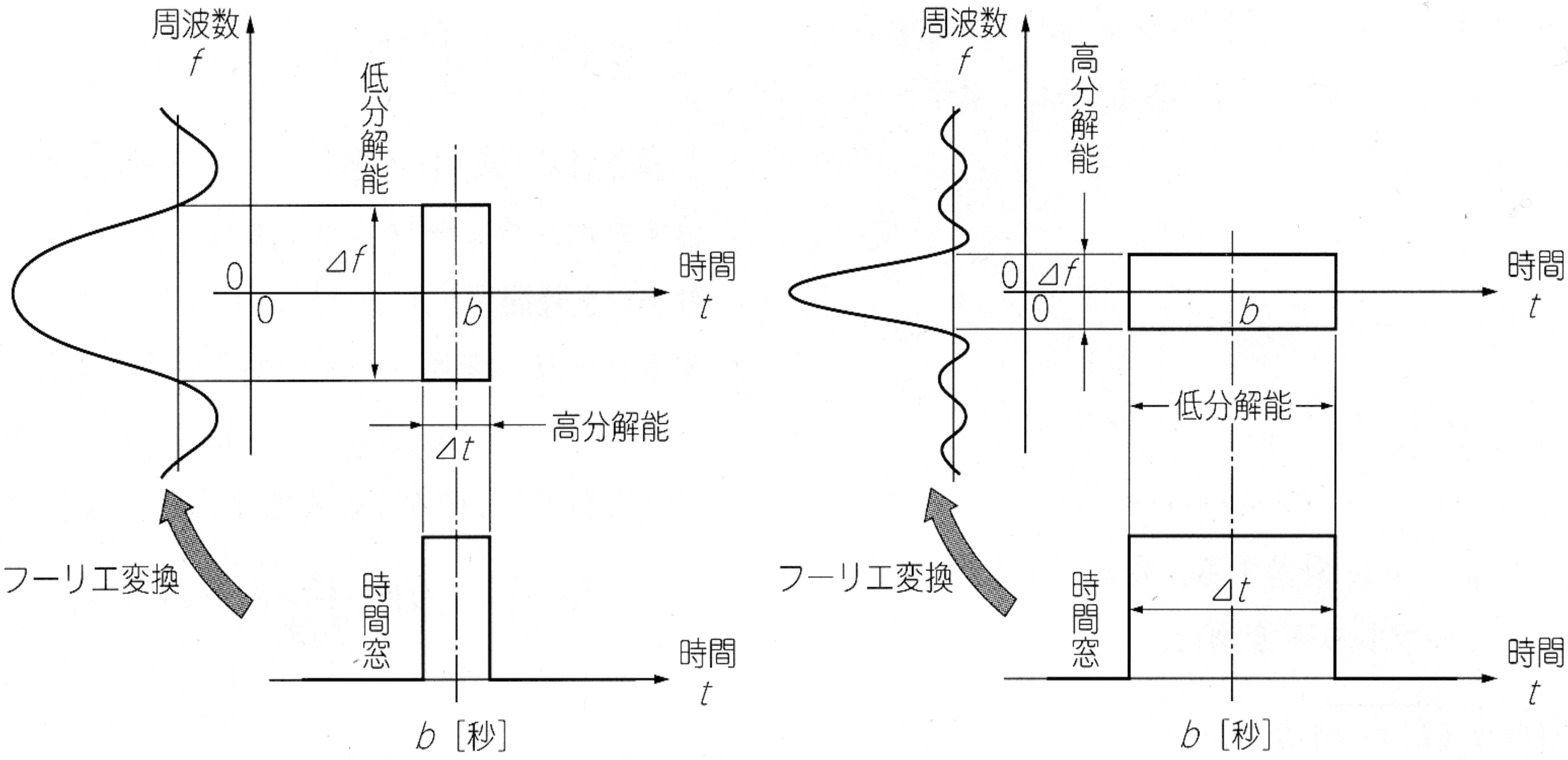



狭い窓幅の時間窓

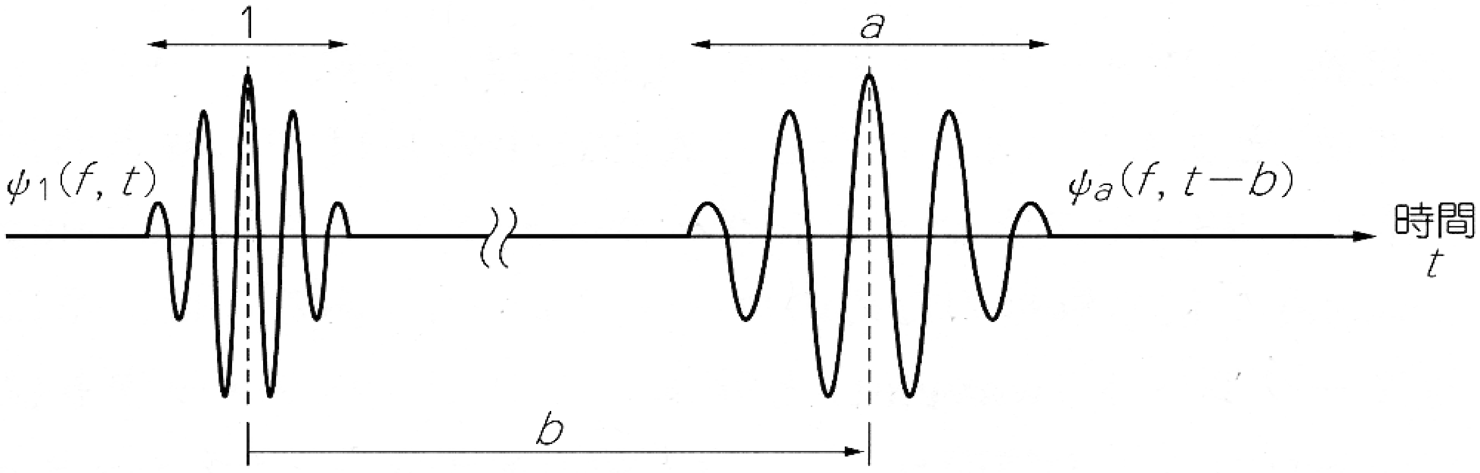



広い窓幅の時間窓

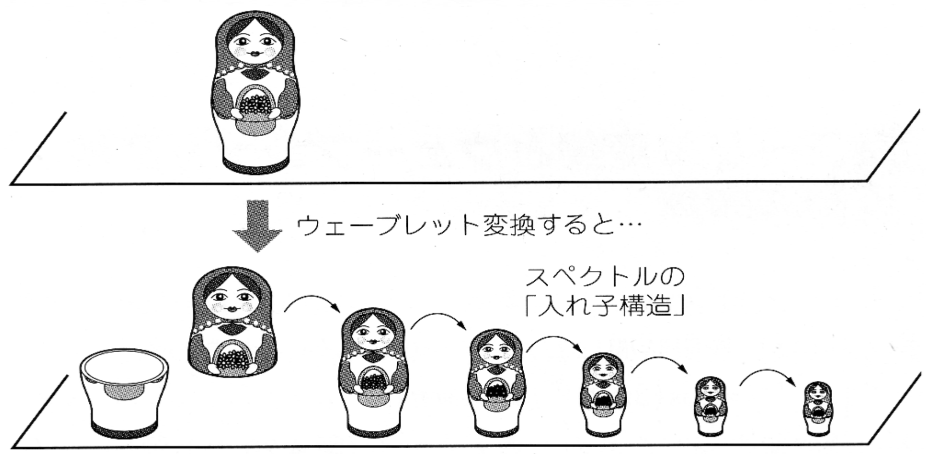
# 窓フーリエ変換の時間分解能と周波数分解能の相互関係



# ウェーブレット変換の時間シフトと拡大/縮小例

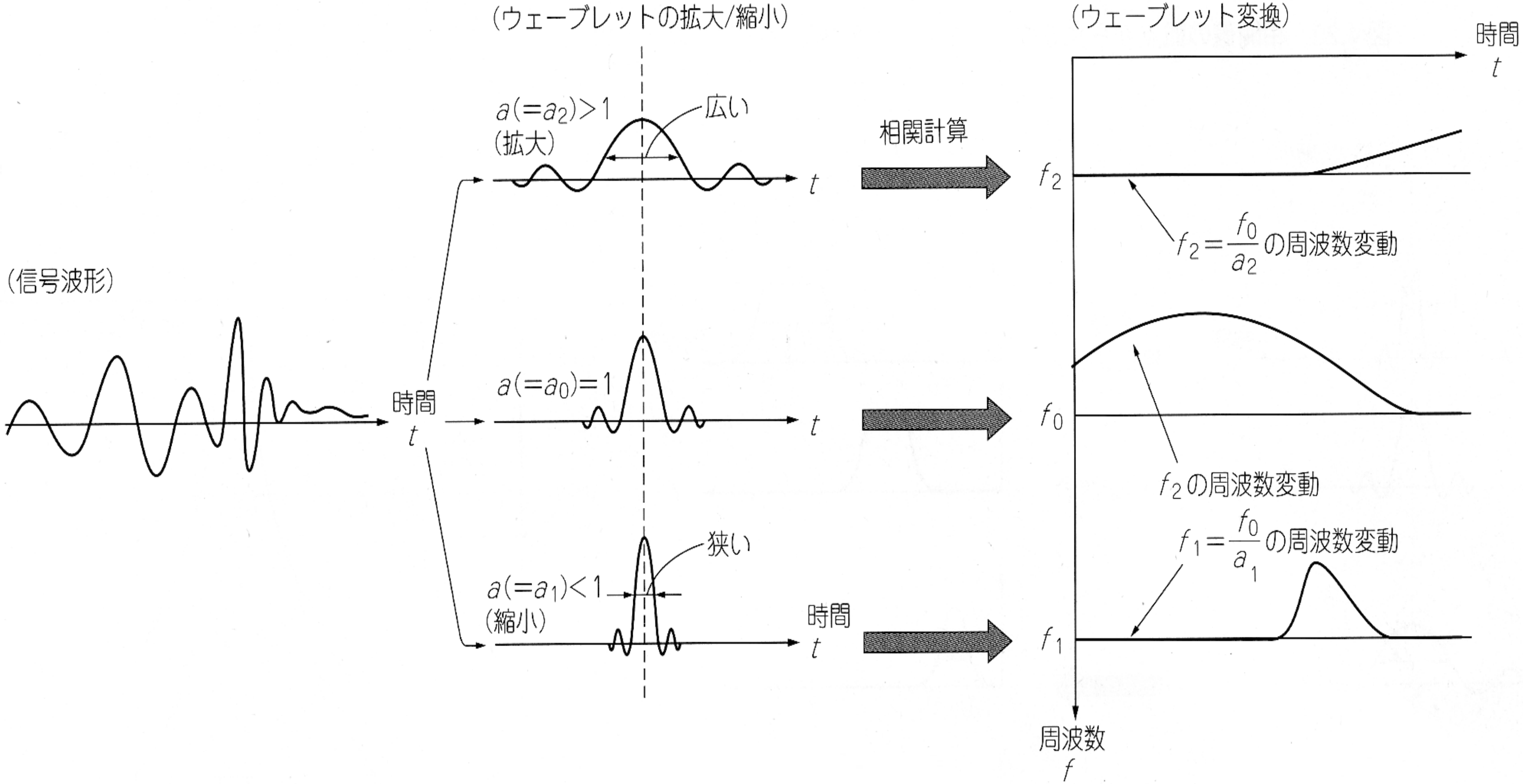



［時間軸方向に$a$（＞1）に拡大し，$b$［秒］だけ
時間シフト（平行移動）したもの］

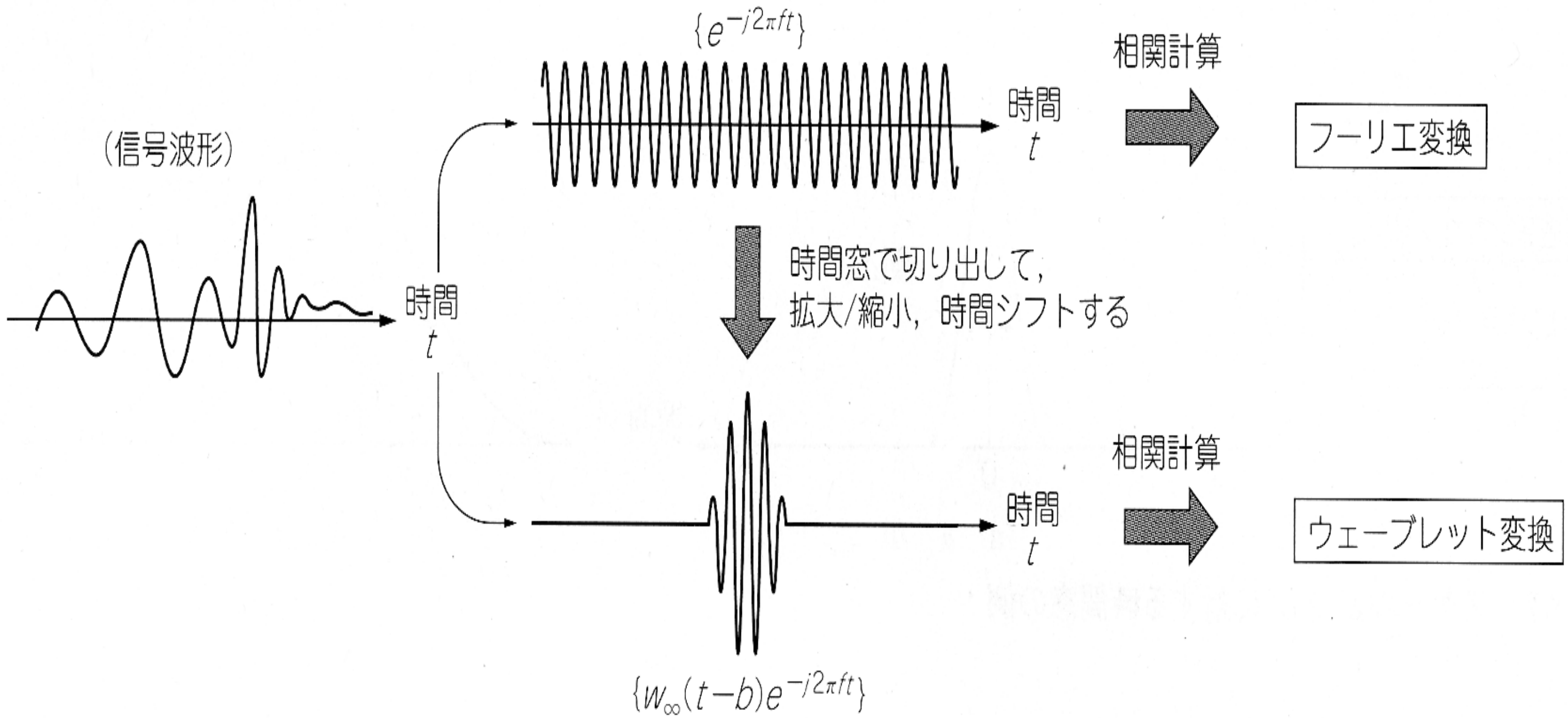



ウェーブレット変換のイメージ（マトリョーシカ）

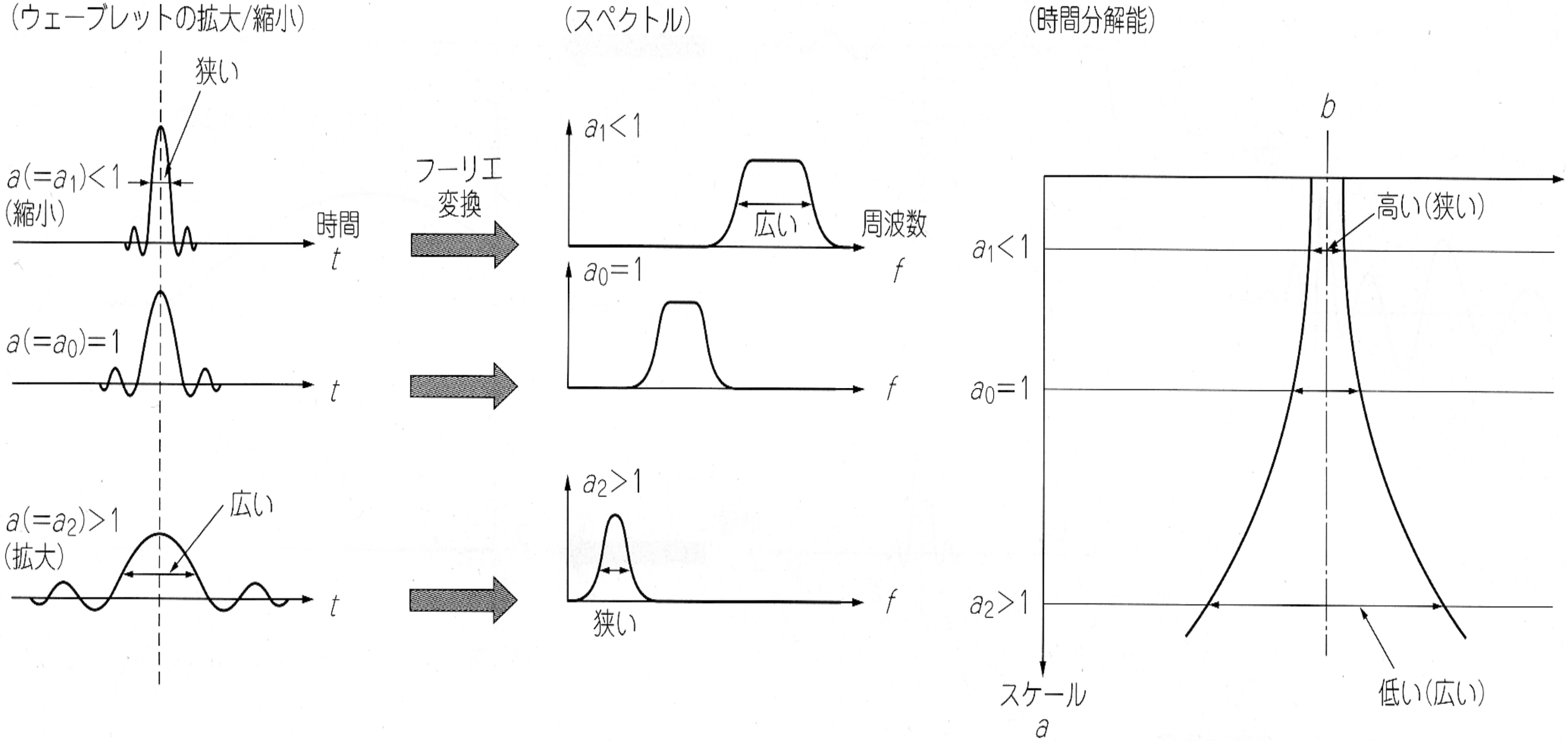
# ウェーブレット変換の原理



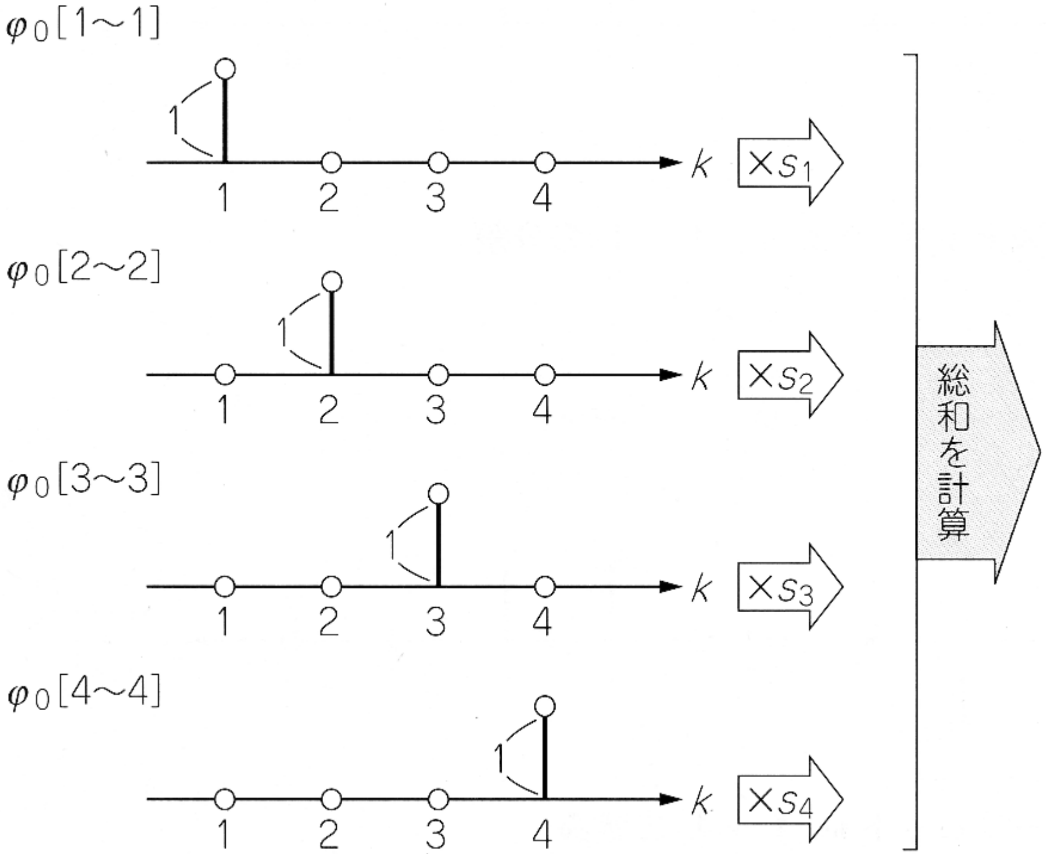
# 相関値の観点から見るウェーブレット変換とフーリエ変換の違い



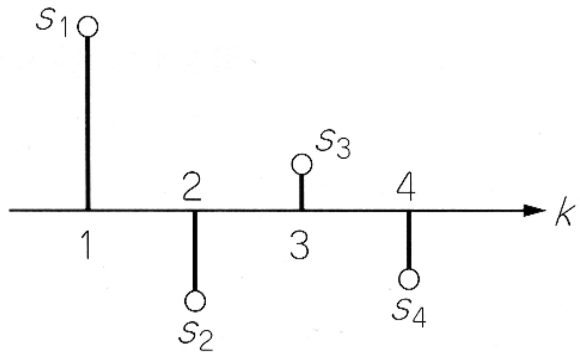
# ウェーブレット変換での時間分解能



# ディジタル信号の別な表現法




$$\boldsymbol{s} = s_1\varphi_0[1\sim1] + s_2\varphi_0[2\sim2] + s_3\varphi_0[3\sim3] + s_4\varphi_0[4\sim4]$$

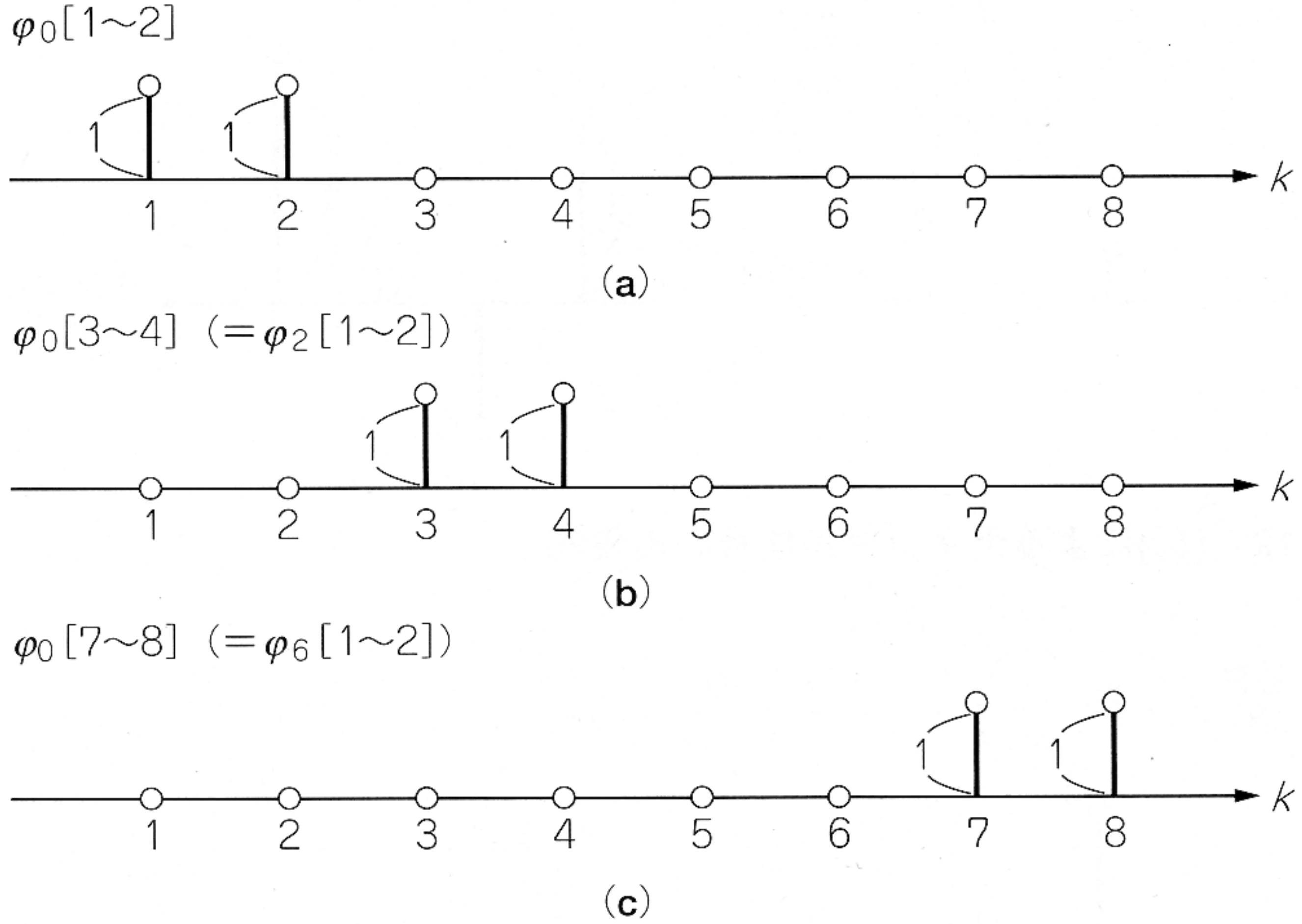



$$\delta_k = \begin{cases} 1 & ; t = k \\ 0 & ; t \neq k \end{cases}$$

(a) $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 3\delta_1 & -2\delta_2 & \delta_3 & 4\delta_4 \end{bmatrix}$

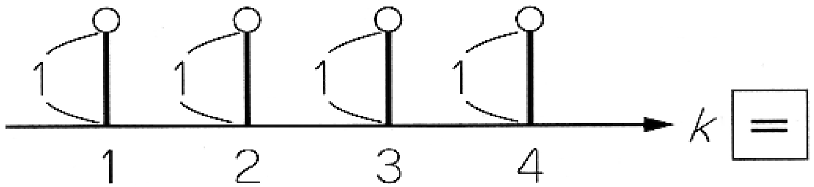
[例題2－1]


$\varphi_0[1\sim2]$
1
1
1 2 3 4 5 6 7 8
$k$
(a)
$\varphi_0[3\sim4]$ $(=\varphi_2[1\sim2])$
1
1
1 2 3 4 5 6 7 8
$k$
(b)
$\varphi_0[7\sim8]$ $(=\varphi_6[1\sim2])$
1
1
1 2 3 4 5 6 7 8
$k$
(c)

## 基本単位ステップ（直流）$\varphi_0$ [1 ～ 4] の分解

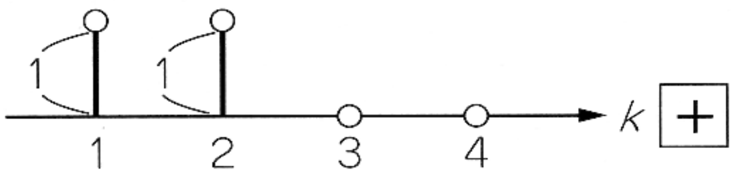
$$\boxed{\varphi_0[1\sim4]=\varphi_0[1\sim2]+\varphi_0[3\sim4]}$$

$\varphi_0[1\sim4]$

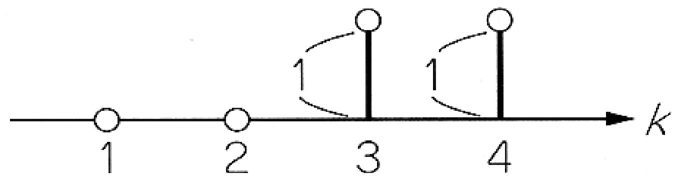



（幅4の基本単位ステップ）

$\varphi_0[1\sim2]$



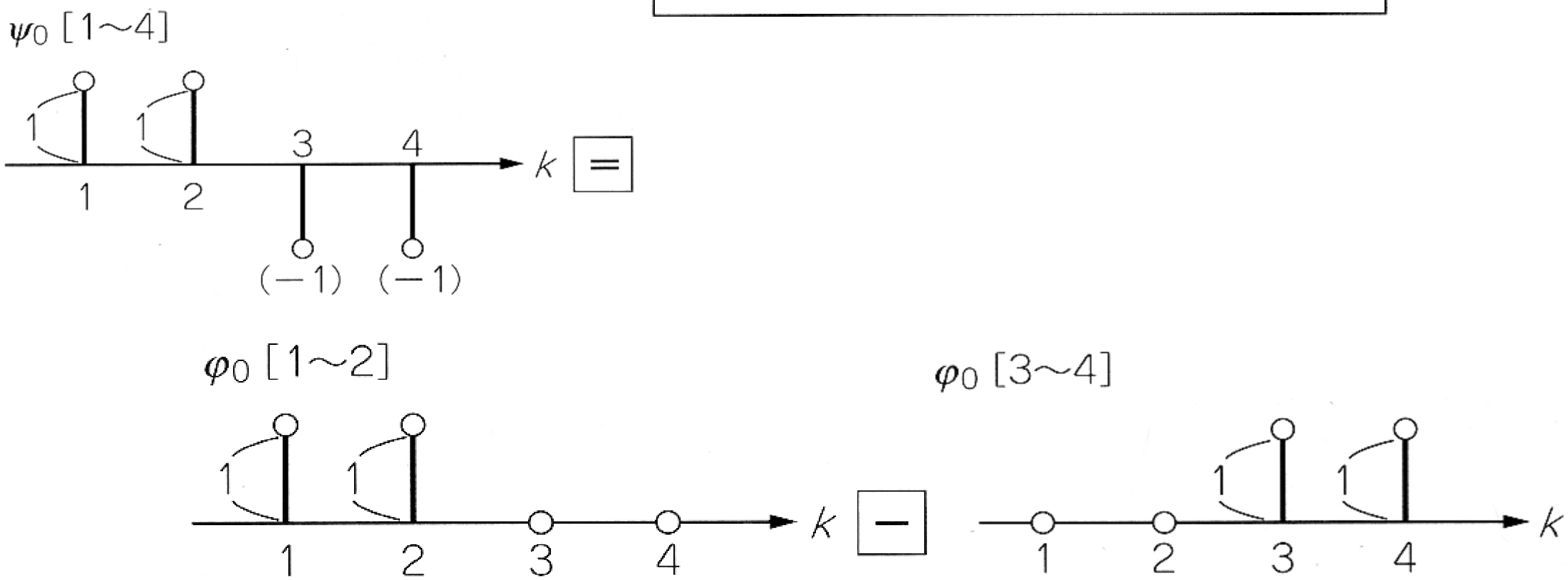

$\varphi_0[3\sim4]$



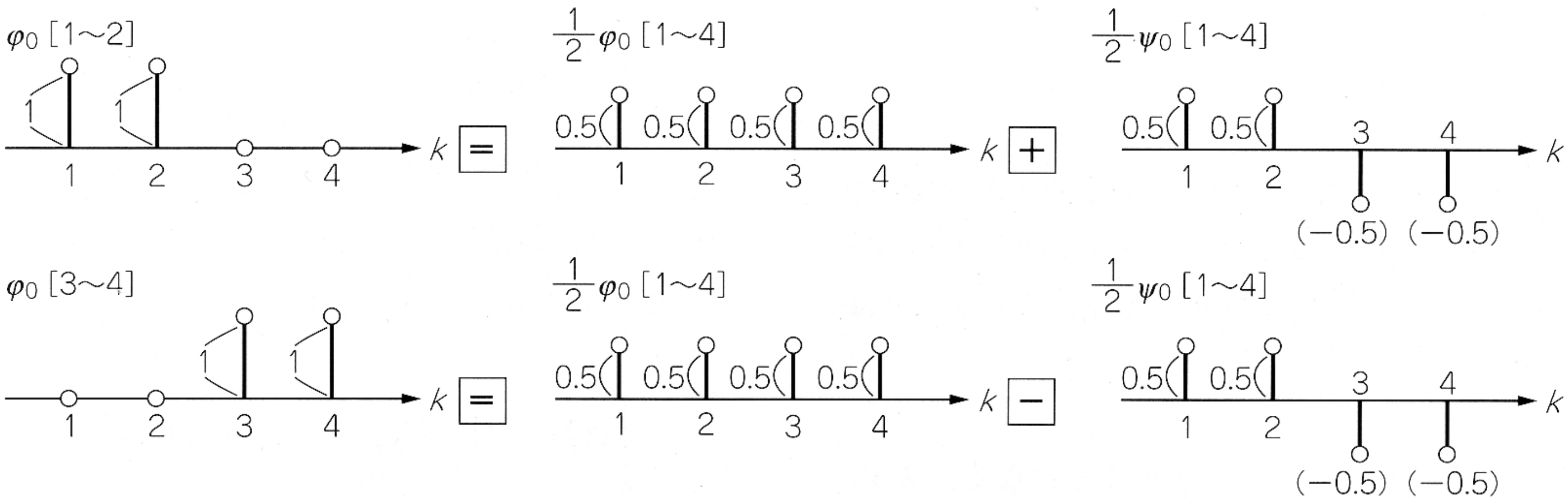

$\left(\begin{array}{l}\varphi_0[1\sim2]\text{を2サンプル時間シフト}\\ \text{した}\varphi_2[1\sim2]\text{に等しい}\end{array}\right)$

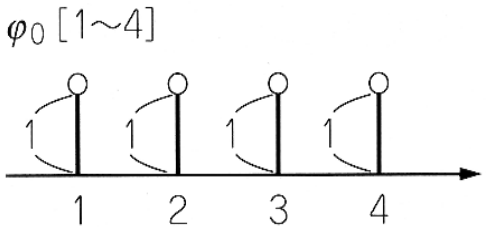
## 基本ウェーブレット $\psi_0[1\sim4]$ の定義

$$\psi_0[1\sim4]=\varphi_0[1\sim2]-\varphi_0[3\sim4]$$

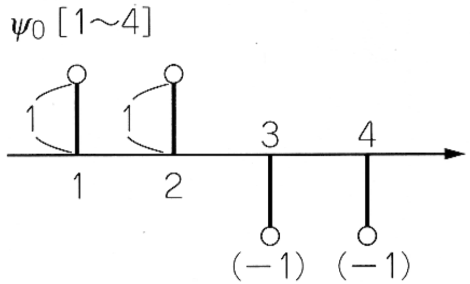


# *逆変換式のイメージ*




(幅4の基本単位ステップ)

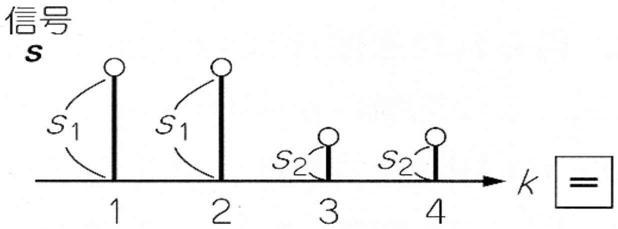


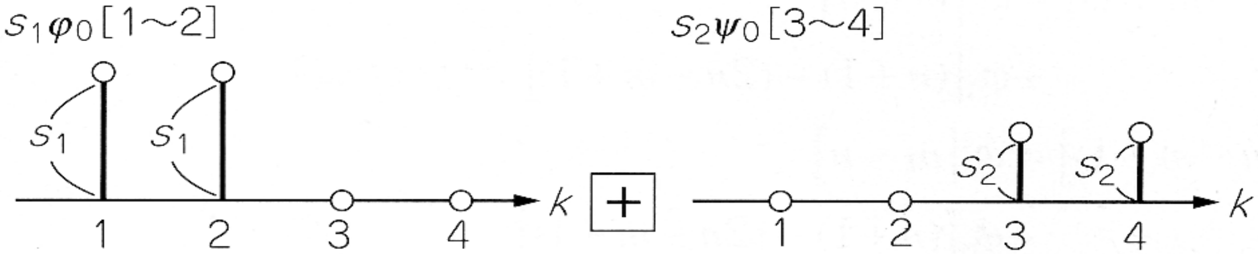

基本ウェーブレット $\psi_0$[1 ～ 4]

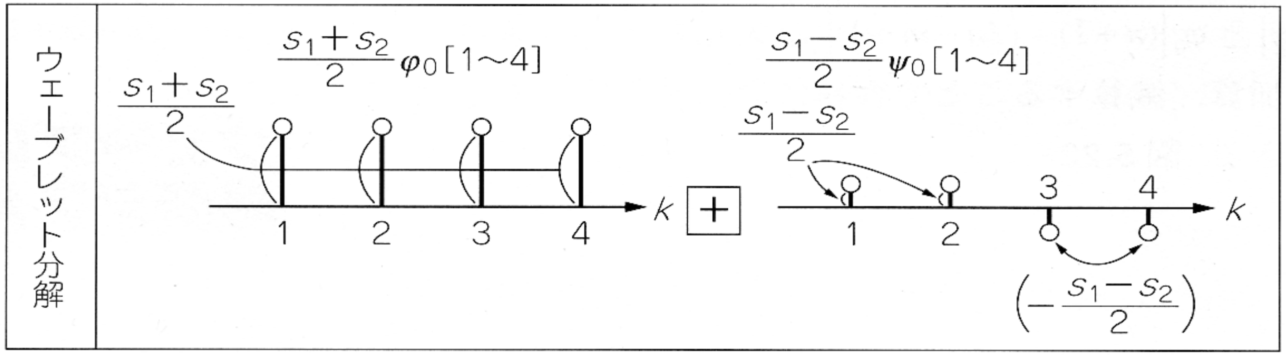
# ディジタル信号の二つの分解例

$$\begin{cases}\varphi_0[1\sim4]=\varphi_0[1\sim2]+\varphi_0[3\sim4]\\ \psi_0[1\sim4]=\varphi_0[1\sim2]-\varphi_0[3\sim4]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi_0[1\sim2]=\frac{1}{2}\{\varphi_0[1\sim4]+\psi_0[1\sim4]\}\\ \varphi_0[3\sim4]=\frac{1}{2}\{\varphi_0[1\sim4]-\psi_0[1\sim4]\}\end{cases}$$

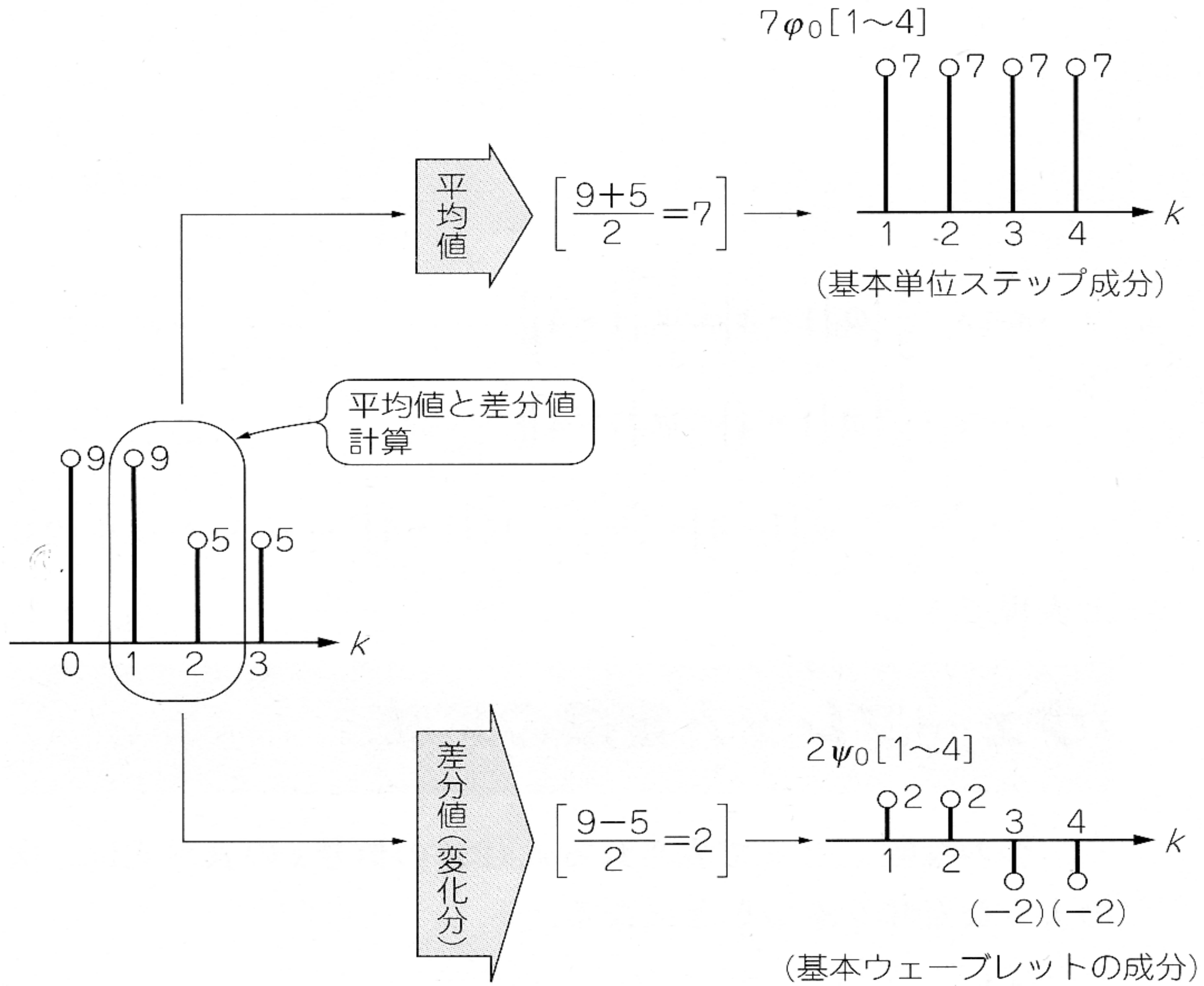
$$\boldsymbol{s}=s_1\varphi_0[1\sim2]+s_2\varphi_0[3\sim4]\Rightarrow \boldsymbol{s}=s_1\cdot\frac{1}{2}\{\varphi_0[1\sim4]+\psi_0[1\sim4]\}+s_2\cdot\frac{1}{2}\{\varphi_0[1\sim4]-\psi_0[1\sim4]\}=\frac{s_1+s_2}{2}\cdot\varphi_0[1\sim4]+\frac{s_1-s_2}{2}\cdot\psi_0[1\sim4]$$



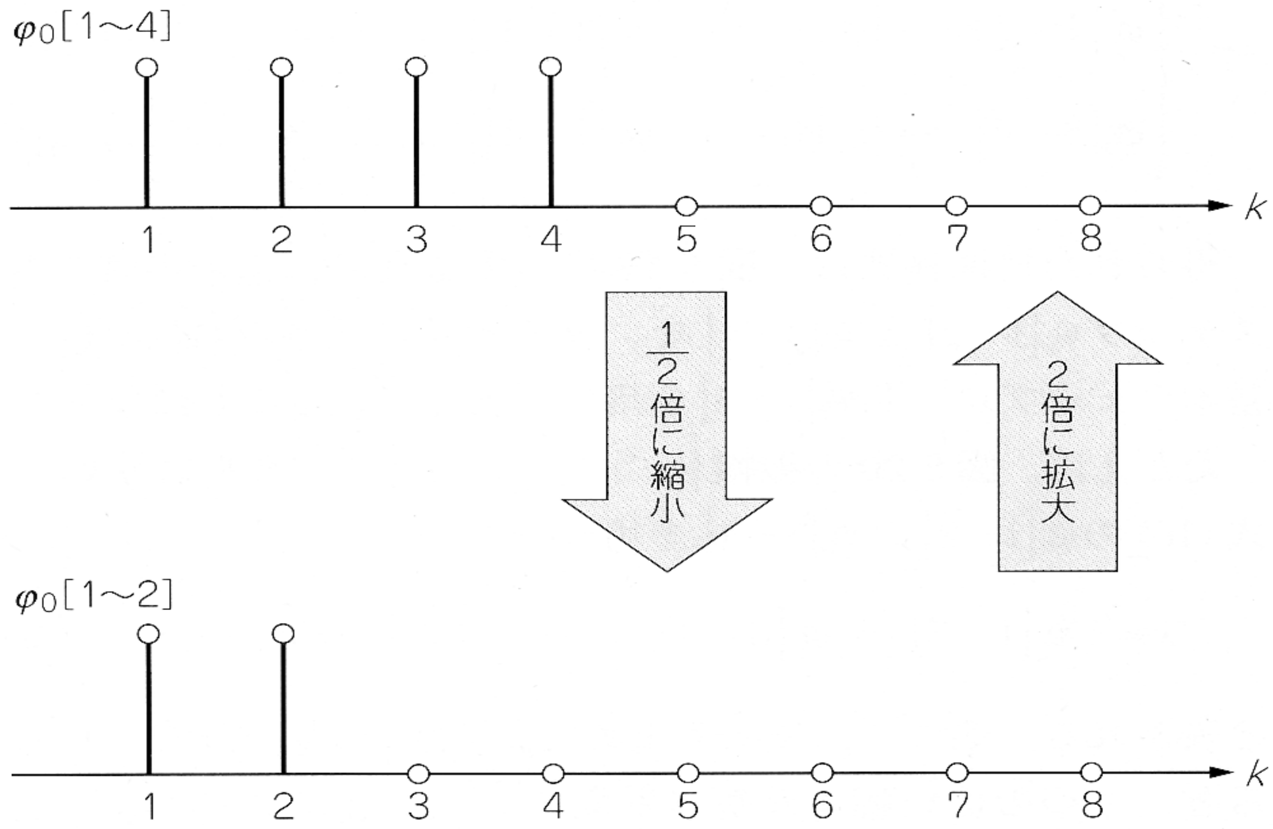



# ウェーブレット変換に基づく信号の分解例

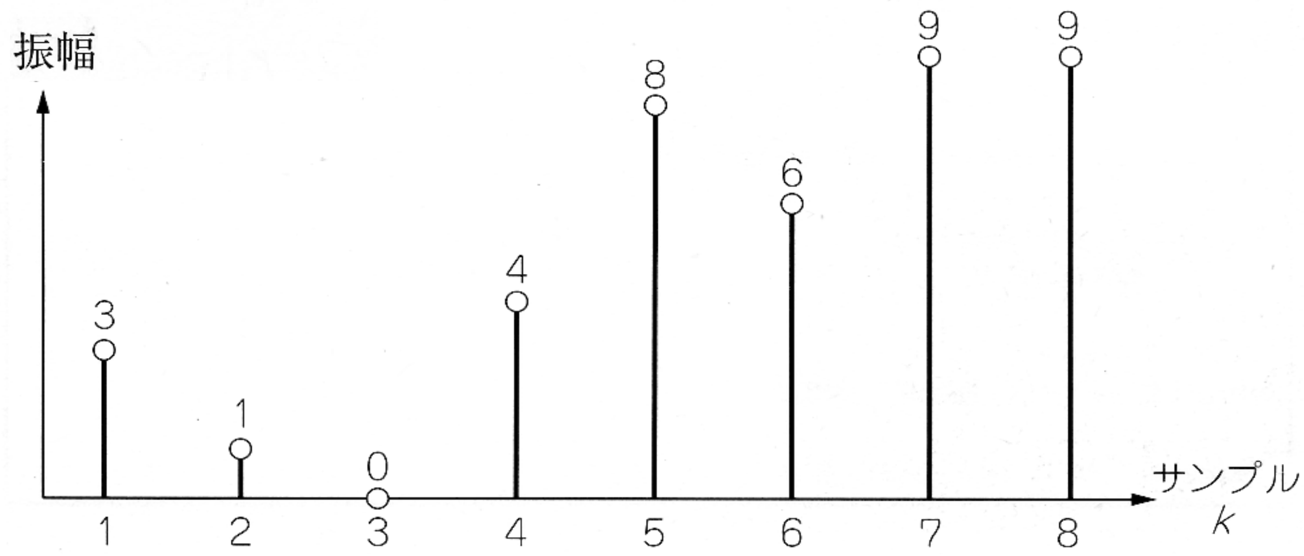


# ウェーブレット変換の拡大・縮小例



[例題2－2]

ディジタル信号をウェーブレット変換して，8つの成分に分解せよ。



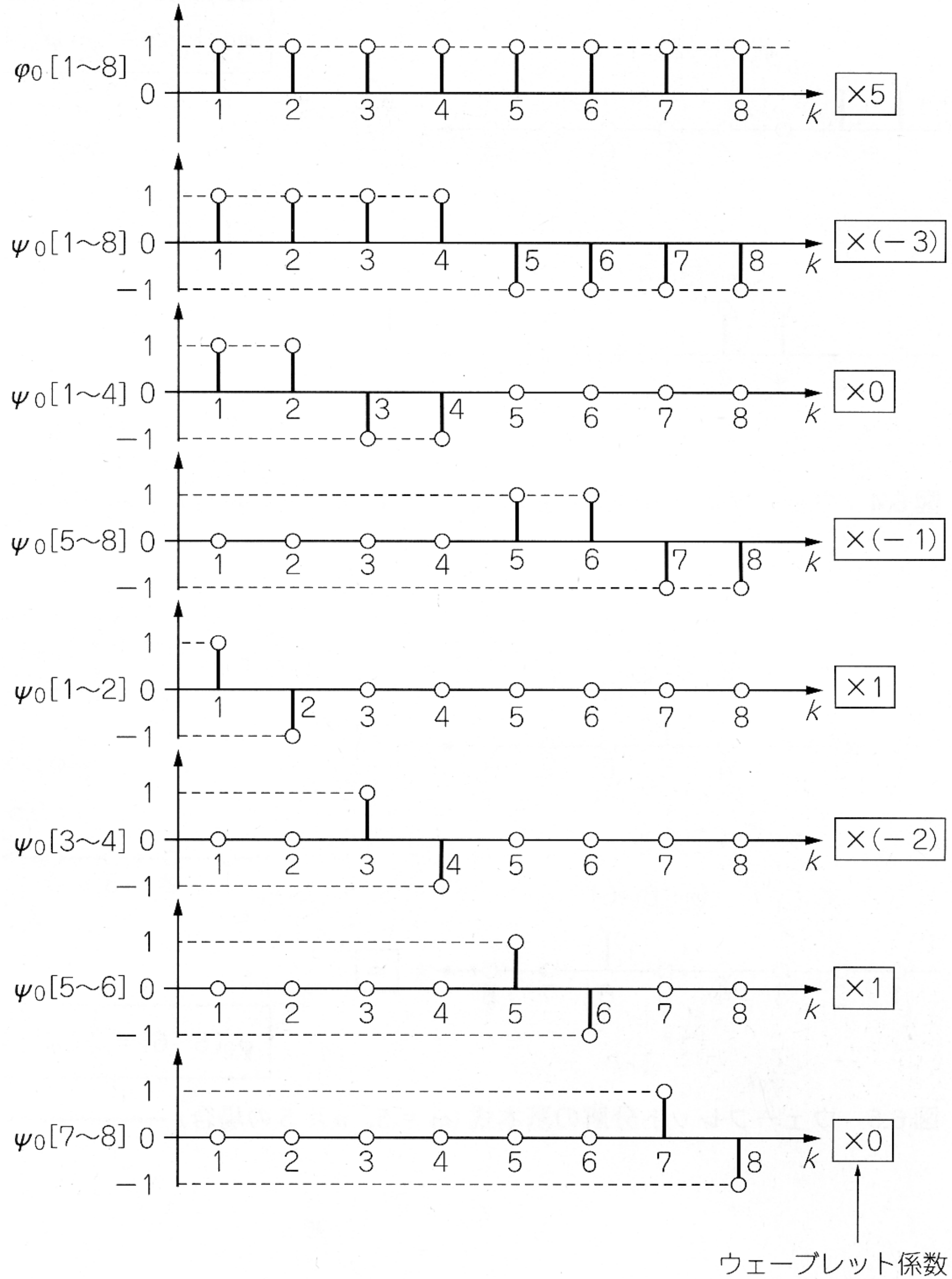
[解答2－2]

$$\begin{cases} \varphi_0[1\sim4] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[1\sim8] + \psi_0[1\sim8]\right) \\ \varphi_0[5\sim8] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[1\sim8] - \psi_0[1\sim8]\right) \end{cases}$$

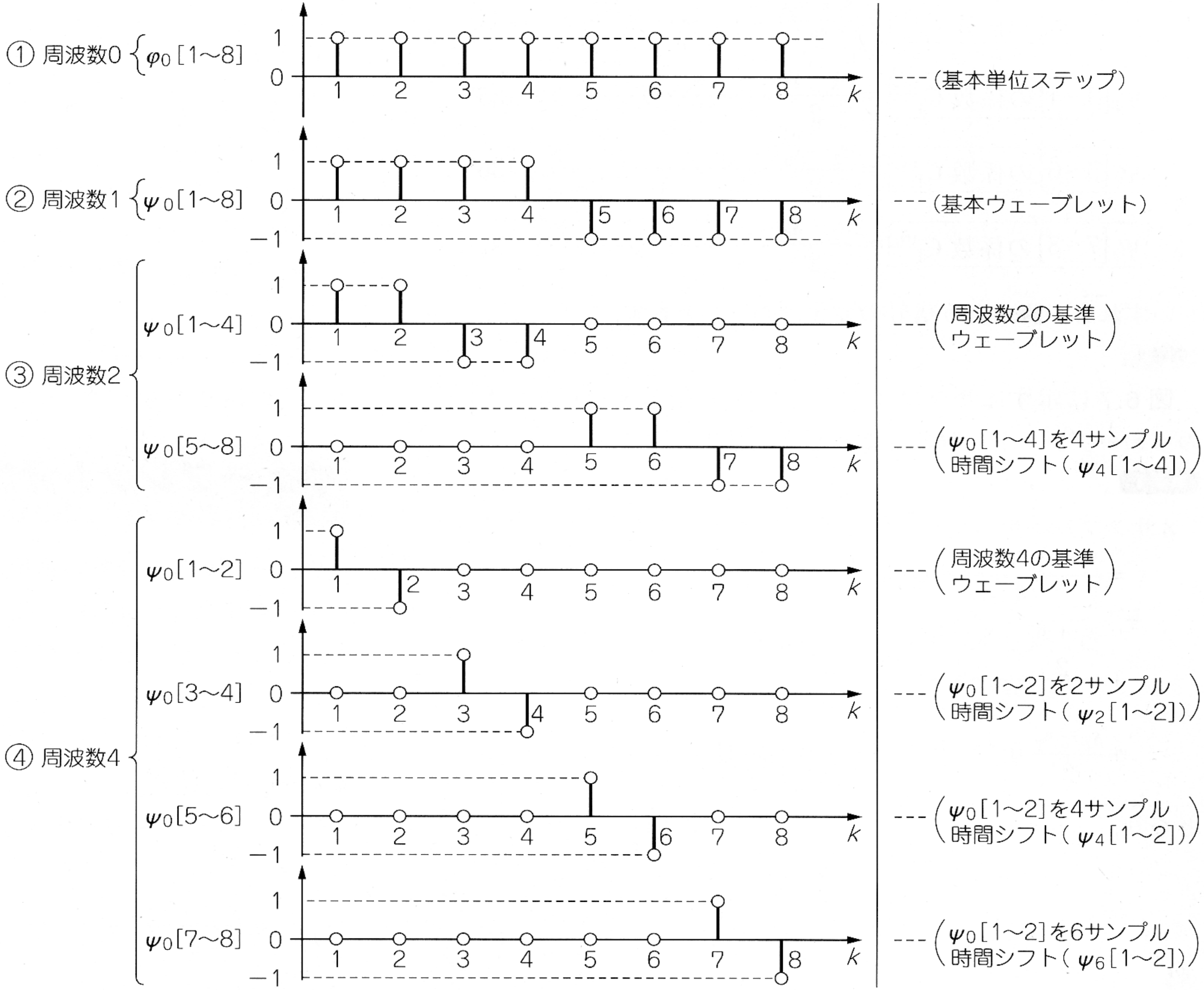
$$\begin{cases} \varphi_0[1\sim2] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[1\sim4] + \psi_0[1\sim4]\right) \\ \varphi_0[3\sim4] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[1\sim4] - \psi_0[1\sim4]\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_0[5\sim6] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[5\sim8] + \psi_0[5\sim8]\right) \\ \varphi_0[7\sim8] = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_0[5\sim8] - \psi_0[5\sim8]\right) \end{cases}$$

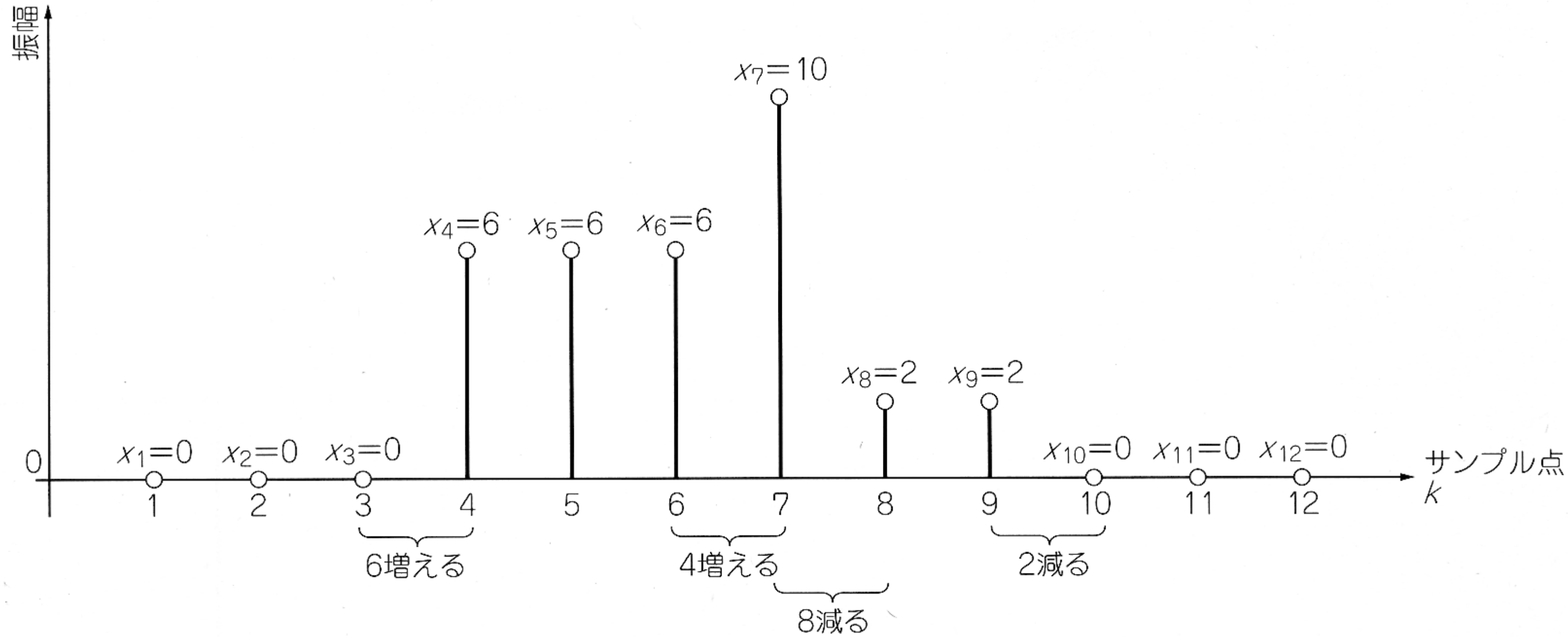
$$\psi_0[5\sim8] = \psi_4[1\sim4]$$



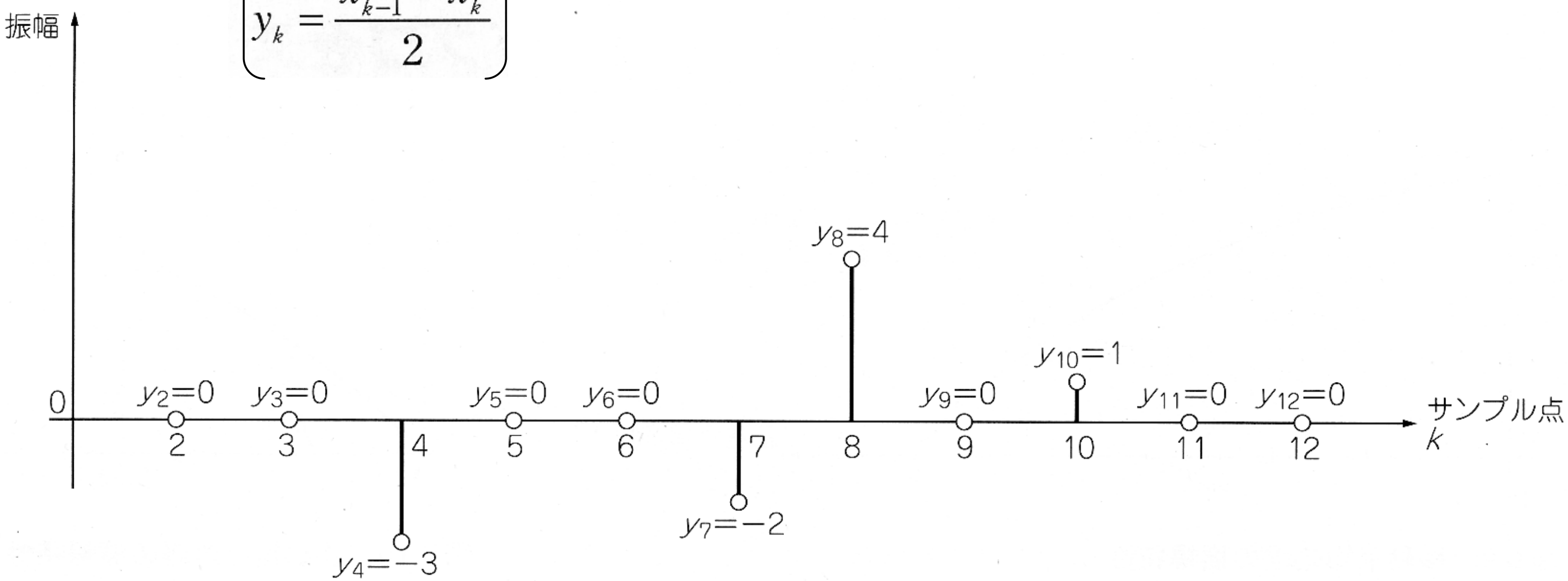
# ウェーブレット変換の基底となる信号



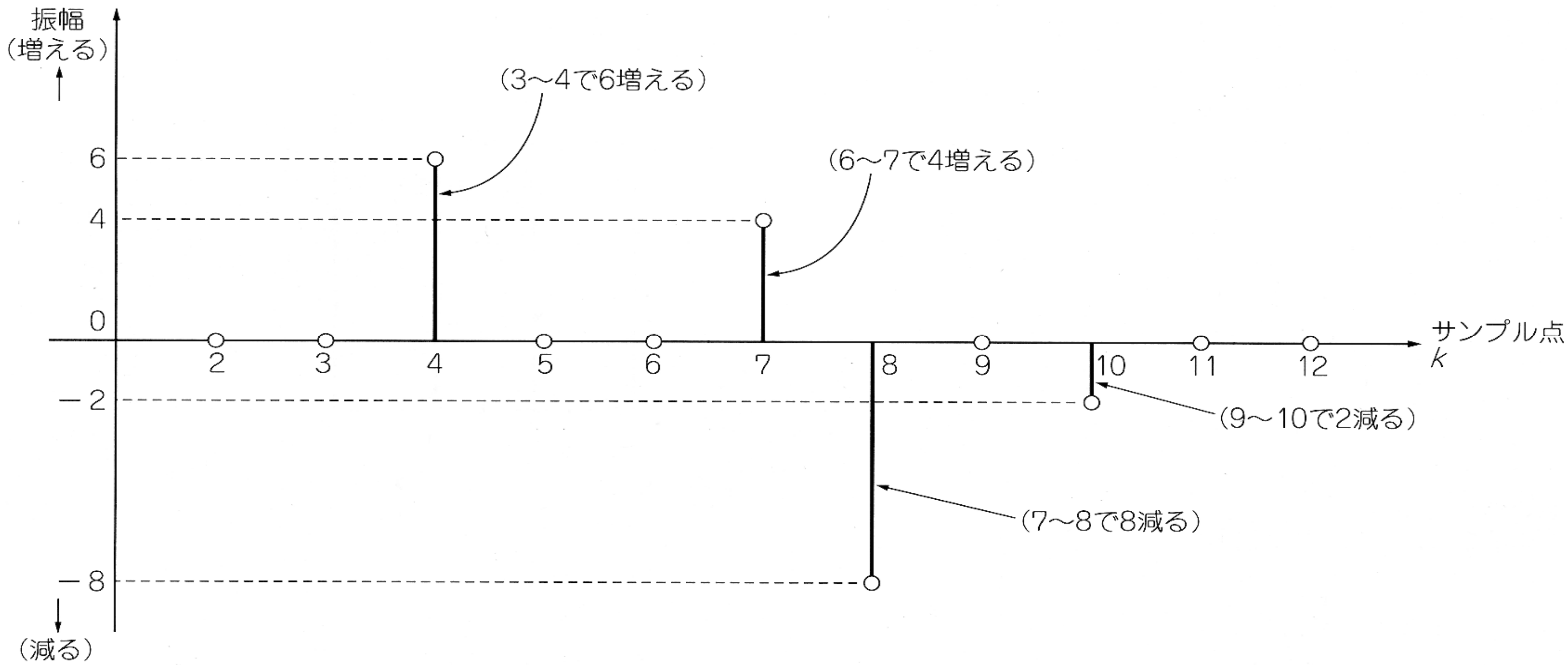
# 移動差分と変化量




$$y_k = \frac{x_{k-1} - x_k}{2}$$



## 移動差分による処理結果を(－2)倍した値(＝変化量)



# ウェーブレット変換の　式と　理　解

$$\boldsymbol{s} = C_0^{(0)}\varphi_0[1\sim8] + C_1^{(0)}\varphi_0[1\sim8] + C_2^{(0)}\varphi_0[1\sim4]$$
$$+ C_2^{(4)}\varphi_0[5\sim8] + C_4^{(0)}\varphi_0[1\sim2] + C_4^{(2)}\varphi_0[3\sim4]$$
$$+ C_4^{(4)}\varphi_0[5\sim6] + C_4^{(6)}\varphi_0[7\sim8]$$

① $\boxed{\varphi_0[1\sim8]\text{の係数 } C_0^{(0)}}$

$$= \frac{s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7+s_8}{8}$$

= 8サンプルの平均値（直流成分）

② $\boxed{\Psi_0[1\sim8]\text{の係数 } C_1^{(0)}}$

$$= \frac{(s_1+s_2+s_3+s_4)-(s_5+s_6+s_7+s_8)}{8} = \frac{\dfrac{s_1+s_2+s_3+s_4}{4} - \dfrac{s_5+s_6+s_7+s_8}{4}}{2}$$

$$= \frac{\text{（前半4サンプルの平均値）} - \text{（後半4サンプルの平均値）}}{2}$$

=（4サンプルでブロック化したときの各ブロックの平均値
　の変化分の1/2）

③ $\boxed{\Psi_0[1\sim4]\text{の係数 } C_2^{(0)}}$

$$= \frac{(s_1+s_2)-(s_3+s_4)}{4} = \frac{\dfrac{s_1+s_2}{2}-\dfrac{s_3+s_4}{2}}{2}$$

＝（前半４サンプルに対して，２サンプルでブロック化したときの各ブロックの平均値の変化分の 1/2）

$\boxed{\Psi_0[5\sim8]\text{の係数 } C_2^{(4)}}$

$$= \frac{(s_5+s_6)-(s_7+s_8)}{4} = \frac{\dfrac{s_5+s_6}{2}-\dfrac{s_7+s_8}{2}}{2}$$

＝（後半４サンプルに対して，２サンプルでブロック化したときの各ブロックの平均値の変化分の 1/2）

$\boxed{\Psi_0[1\sim2]\text{の係数 } C_4^{(0)}} = \dfrac{s_1-s_2}{2}$

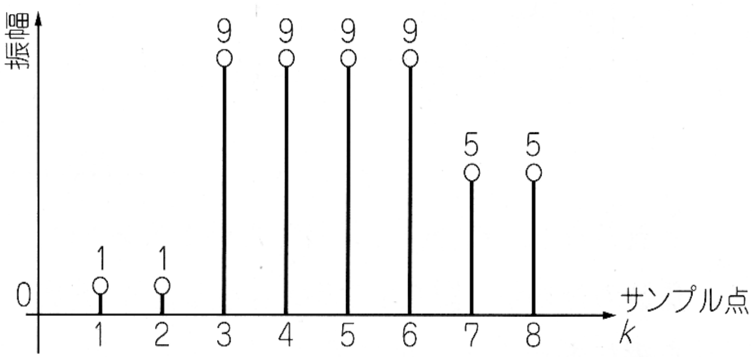
$\boxed{\Psi_0[3\sim4]\text{の係数 } C_4^{(2)}} = \dfrac{s_3-s_4}{2}$

$\boxed{\Psi_0[5\sim6]\text{の係数 } C_4^{(4)}} = \dfrac{s_5-s_6}{2}$

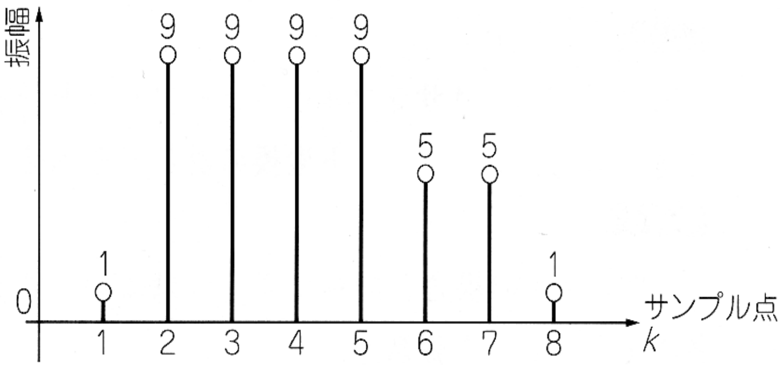
$\boxed{\Psi_0[7\sim8]\text{の係数 } C_4^{(6)}} = \dfrac{s_7-s_8}{2}$

［例題2-3］

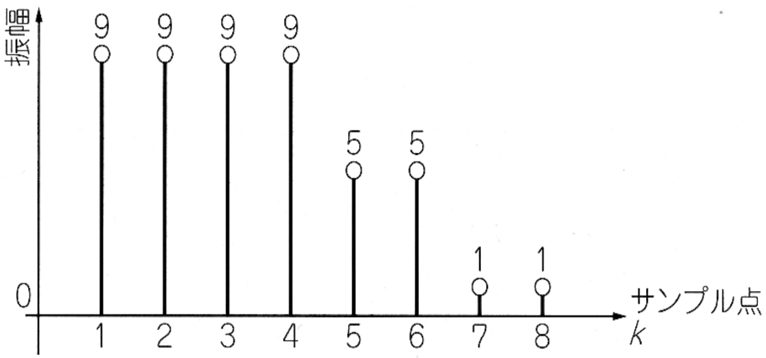
各ディジタル信号のウェーブレッド変換を求め，物理的な意味を求めよ．



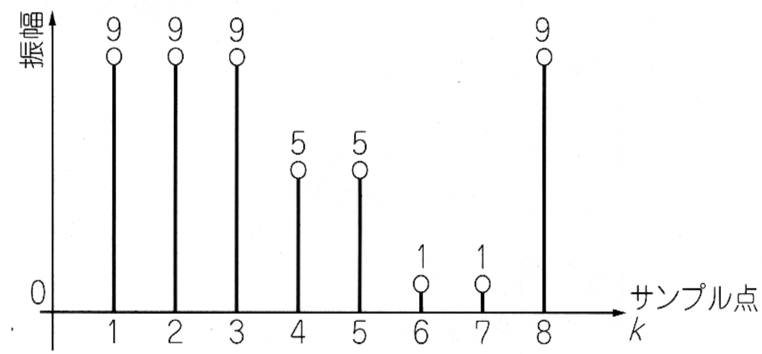

(a) 信号1




(b) 信号2




(c) 信号3




(d) 信号4

*本日は，お疲れさまでした．*

*ご静聴，有り難うございました．*

東京電機大学／工学部／情報通信工学科
三谷 政昭